

IZBORNO NATJECANJE – Izbor MEMO ekipe

9. svibnja 2010.

1. Neka su a , b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c = 3$. Dokaži da je

$$\frac{a^4}{b^2 + c} + \frac{b^4}{c^2 + a} + \frac{c^4}{a^2 + b} \geq \frac{3}{2}.$$

2. Na svakom polju ploče $n \times n$ ($n \geq 2$) nalazi se žarulja koja može biti upaljena ili ugašena.

U svakom koraku biramo jedan kvadrat 2×2 na toj ploči i unutar njega sve upaljene žarulje ugasimo, a ugašene upalimo. Za raspored upaljenih žarulja kažemo da je *dobar* ako se može postići da, počevši od njega, nakon konačno mnogo koraka, sve žarulje budu ugašene.

	☀							☀	
	☀	☀						☀	☀
	☀		☀			☀		☀	
	☀			☀	☀			☀	
	☀							☀	
	☀							☀	
	☀							☀	
	☀							☀	
	☀							☀	
	☀							☀	

- a) Dokaži da raspored prikazan na slici nije dobar.
 (Prikazan je položaj svih upaljenih žarulja na ploči 10×10 .)
- b) Koliko bi, u tom primjeru, minimalno dodatnih žarulja na početku trebalo upaliti da raspored bude dobar?
- c) Odredi broj svih mogućih dobrih početnih rasporeda za $n \times n$ ploču.
3. Unutar trokuta ABC dana je točka P takva da je

$$\sphericalangle ABP = \sphericalangle PCA = \frac{1}{3} (\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA).$$

Dokaži da je $\frac{|AB|}{|AC| + |PB|} = \frac{|AC|}{|AB| + |PC|}$.

4. Dokaži da ne postoje prosti broj p i prirodni brojevi a i n ($n \geq 2$) takvi da vrijedi

$$2^p + 3^p = a^n.$$

IZBORNO NATJECANJE 2010. – Izbor MEMO ekipe
rješenja zadataka

Zadatak 1.

Neka su a , b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c = 3$. Dokaži da je

$$\frac{a^4}{b^2 + c} + \frac{b^4}{c^2 + a} + \frac{c^4}{a^2 + b} \geq \frac{3}{2}.$$

Prvo rješenje.

Prema A–G nejednakosti vrijedi:

$$\frac{a^4}{b^2 + c} + \frac{b^2 + c}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^4}{b^2 + c} \cdot \frac{b^2 + c}{4}} = a^2.$$

Analogno dobijemo:

$$\frac{b^4}{c^2 + a} + \frac{c^2 + a}{4} \geq b^2$$

i

$$\frac{c^4}{a^2 + b} + \frac{a^2 + b}{4} \geq c^2.$$

Zbrajanjem te tri nejednakosti dobijemo:

$$\left(\frac{a^4}{b^2 + c} + \frac{b^4}{c^2 + a} + \frac{c^4}{a^2 + b} \right) + \left(\frac{b^2 + c}{4} + \frac{c^2 + a}{4} + \frac{a^2 + b}{4} \right) \geq a^2 + b^2 + c^2,$$

odnosno

$$\frac{a^4}{b^2 + c} + \frac{b^4}{c^2 + a} + \frac{c^4}{a^2 + b} \geq \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{4}(a + b + c). \quad (*)$$

Međutim, zbog A–K nejednakosti vrijedi:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3},$$

odnosno $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$.

Uvrštavanjem te nejednakosti i zadanog uvjeta u nejednakost (*) dobijemo:

$$\frac{a^4}{b^2 + c} + \frac{b^4}{c^2 + a} + \frac{c^4}{a^2 + b} \geq \frac{3}{4} \cdot 3 - \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{2}.$$

Drugo rješenje.

Primjenom Cauchyjeve nejednakosti (ili težinske A–K nejednakosti) dobivamo

$$\frac{a^4}{b^2+c} + \frac{b^4}{c^2+a} + \frac{c^4}{a^2+b} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2+b^2+c^2+a+b+c} = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2+b^2+c^2+3}. \quad (**)$$

Korištenjem A–K nejednakosti imamo

$$a^2+b^2+c^2 \geq 3 \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^2 = 3.$$

Uvedimo zamjenu $x = a^2 + b^2 + c^2$. Vrijedi $x \geq 3$, pa iz (**) zaključujemo da je dovoljno dokazati da vrijedi

$$\frac{x^2}{x+3} \geq \frac{3}{2}.$$

No, ta je nejednakost ekvivalentna s $(x-3)(2x+3) \geq 0$ i očito vrijedi za $x \geq 3$.

Napomena. Gornju nejednakost smo mogli dokazati i ovako:

$$\frac{x^2}{x+3} = \frac{x}{1+\frac{3}{x}} \geq \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}.$$

Zadatak 2.

Na svakom polju ploče $n \times n$ ($n \geq 2$) nalazi se žarulja koja može biti upaljena ili ugašena.

U svakom koraku biramo jedan kvadrat 2×2 na toj ploči i unutar njega sve upaljene žarulje ugasimo, a ugašene upalimo. Za raspored upaljenih žarulja kažemo da je *dobar* ako se može postići da, počevši od njega, nakon konačno mnogo koraka, sve žarulje budu ugašene.

	☀							☀	
	☀	☀						☀	☀
	☀		☀			☀		☀	
	☀			☀	☀			☀	
	☀							☀	
	☀							☀	
	☀							☀	
	☀							☀	
	☀							☀	
	☀							☀	

- Dokaži da raspored prikazan na slici nije dobar.
(Prikazan je položaj svih upaljenih žarulja na ploči 10×10 .)
- Koliko bi, u tom primjeru, minimalno dodatnih žarulja na početku trebalo upaliti da raspored bude dobar?
- Odredi broj svih mogućih dobrih početnih rasporeda za $n \times n$ ploču.

Rješenje.

a) Primijetimo da je za svaki dobar raspored nužno da je u svakom retku i stupcu parno mnogo upaljenih žarulja.

Budući da se u svakom koraku u određenom retku (odn. stupcu) broj upaljenih žarulja promjeni za 2, 0 ili -2 , parnost broja upaljenih žarulja u nekom retku (odnosno stupcu) uvijek ostaje ista. Budući da je u trenutku kad su sve žarulje ugašene broj upaljenih očito paran u svakom retku (odnosno stupcu) takav mora biti i na početku.

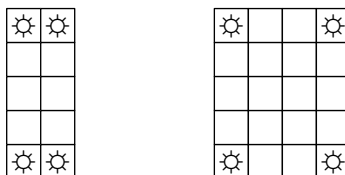
Prema tome, raspored na slici nije dobar jer je postoje stupci u kojima je neparno mnogo upaljenih žarulja (npr. treći stupac).

b) Budući da je u 3., 4., 5., 6., 7. i 8. stupcu neparan broj upaljenih žarulja, nužno je dodati još barem 6 žarulja, po jednu u svaki stupac, na način da broj upaljenih žarulja po recima ostane paran. Pokažimo da je to i dovoljno.

Primjerice, dodajmo 6 žarulja na mjesta $(1, 3), \dots, (1, 8)$. Primjenom postupka na potkvadrata koji počinju na mjestima $(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (2, 4), (2, 6), (3, 5)$ ostaju upaljene samo žarulje na mjestima $(3, 2), \dots, (10, 2)$ i $(3, 9), \dots, (10, 9)$. Primjenom postupka na potkvadrata koji počinju na mjestima $(3, 2), (3, 3), \dots, (3, 8)$, sve žarulje u 3. i 4. retku su ugašene. Analogno gasimo žarulje u 5. i 6., 7. i 8. te 9. i 10. retku.

Prema tome, minimalni broj dodatnih žarulja koje treba upaliti je šest.

c) Tvrdimo da je za svaki dobar raspored nužno i dovoljno da je u svakom retku i stupcu parno mnogo upaljenih žarulja. Nužnost smo pokazali u a) dijelu, a dovoljnost pokazujemo induktivno. Uzastopnom primjenom operacije na 2×2 kvadrata koji imaju po dva horizontalno susjedna kvadratića u presjeku, zaključujemo da možemo u konačno mnogo koraka promijeniti upaljene u ugašene žarulje i obrnuto koje se nalaze u bilo koja dva retka i dva uzastopna stupca,



Analogno, možemo zaključiti da u konačno mnogo koraka možemo promijeniti upaljene u ugašene žarulje i obrnuto koje nalaze u bilo koja dva retka i dva stupca,

Sada za bilo koju žarulju koja je upaljena (s koordinatama npr. (x, y)) znamo da postoji u istom retku i istom stupcu barem po još jedna upaljena žarulja, npr. (x, z) i (w, y) . Ako je žarulja s koordinatama (w, z) upaljena onda prema gore dokazanom možemo ugasiti sve te 4 žarulje. Ako je žarulja s koordinatama (w, z) ugašena onda prema gore dokazanom možemo upaljene 3 žarulje ugasiti, a jednu ugašenu upaliti što povlači da ćemo sigurno smanjiti broj upaljenih žarulja.

Na kraju prebrojimo tražene rasporede.

Primijetimo da u svakom od prvih $n - 1$ redaka može prvih $n - 1$ žarulja biti upaljeno ili ugašeno, a prema parnosti broja upaljenih među tih prvih $n - 1$ jedinstveno je određeno je li posljednja žarulja upaljena ili ugašena. Dakle, za svaki od prvih $n - 1$ redaka imamo 2^{n-1} mogućnosti, a za sve njih zajedno $2^{(n-1)^2}$.

U posljednjem retku mora biti upaljen parni broj žarulja. Budući da je u prvih $n - 1$ redaka upaljen parni broj žarulja, broj stupaca u kojima je neparno mnogo upaljenih žarulja je paran. Točno u tim stupcima u zadnjem retku moraju biti upaljene žarulje. Dakle, traženi broj rasporeda je $2^{(n-1)^2}$.

Drugo rješenje c) dijela.

Nazovimo postupak kojim se od dobrog rasporeda dolazi do ugašenih žarulja *gašenje* rasporeda, a korak u kojem u odabranom 2×2 kvadratu upaljene žarulje postaju ugašene (i obratno) *mijenjanje* tog kvadrata.

Primijetimo da u gašenju nekog dobrog početnog rasporeda nije važno kojim redoslijedom mijenjamo potkvadrate, te da nijedan potkvadrat ne trebamo mijenjati više od jednom.

Dakle, dobar početni raspored možemo identificirati sa skupom potkvadrata koji se mijenjaju prilikom njegovog gašenja. Primijetimo da je taj skup jedinstven. Naime, žarulja na mjestu $(1, 1)$ može biti ugašena samo mijenjanjem potkvadrata koji počinje na tom mjestu, pa ako je ona upaljena u početnom rasporedu taj potkvadrat mora biti u skupu, a ako je ugašena onda nije u skupu. Sada kada znamo da li je taj potkvadrat uključen u skup, na isti način je, ovisno o žarulji na mjestu $(2, 1)$ jednoznačno određeno da li je potkvadrat koji počinje na mjestu $(2, 1)$ uključen u skup. Na ovaj način možemo induktivno na jedinstven način odrediti za svaki potkvadrat da li je uključen ili ne.

Obratno, za svaki skup 2×2 potkvadrata ploče postoji dobar početni raspored koji se gasi tim skupom (ako krenemo od potpuno ugašene ploče i promijenimo sve potkvadrate iz skupa, dolazimo do traženog dobrog početnog rasporeda).

Prema tome, broj dobrih početnih rasporeda je jednak broju mogućih odabira nekih od 2×2 potkvadrata. Takvih potkvadrata ukupno ima $(n - 1)^2$, pa je traženi broj $2^{(n-1)^2}$.

Zadatak 3.

Unutar trokuta ABC dana je točka P takva da je

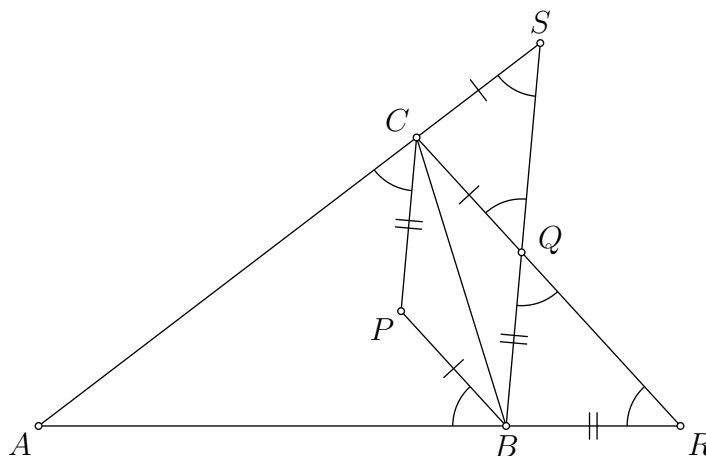
$$\sphericalangle ABP = \sphericalangle PCA = \frac{1}{3}(\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA).$$

Dokaži da je $\frac{|AB|}{|AC| + |PB|} = \frac{|AC|}{|AB| + |PC|}$.

Prvo rješenje.

Označimo s α , β i γ redom kutove pri vrhovima A , B i C trokuta ABC .

Neka je $\varphi = \sphericalangle ABP = \sphericalangle PCA$ pa je $3\varphi = \beta + \gamma$.



Neka je točka Q sa suprotne strane pravca BC od točke P takva da je četverokut $BQCP$ paralelogram, točka R sjecište pravaca AB i CQ , a točka S sjecište pravaca AC i BQ .

Kako je

$$\sphericalangle ARC = \sphericalangle ABP = \sphericalangle PCA = \sphericalangle BSA = \varphi,$$

trokuti ARC i ASB su slični, odakle je

$$\frac{|AB|}{|AS|} = \frac{|AC|}{|AR|}.$$

S druge strane je

$$\sphericalangle RQB = \sphericalangle QCP = 180^\circ - \sphericalangle BPC = (\beta - \varphi) + (\gamma - \varphi) = \varphi = \sphericalangle ARC$$

pa je trokut RQB jednakokračan. Zato je

$$|AR| = |AB| + |BR| = |AB| + |BQ| = |AB| + |PC|.$$

Analogno dokazujemo da je i trokut QSC jednakokračan te dobivamo

$$|AS| = |AC| + |CS| = |AC| + |CQ| = |AC| + |PB|.$$

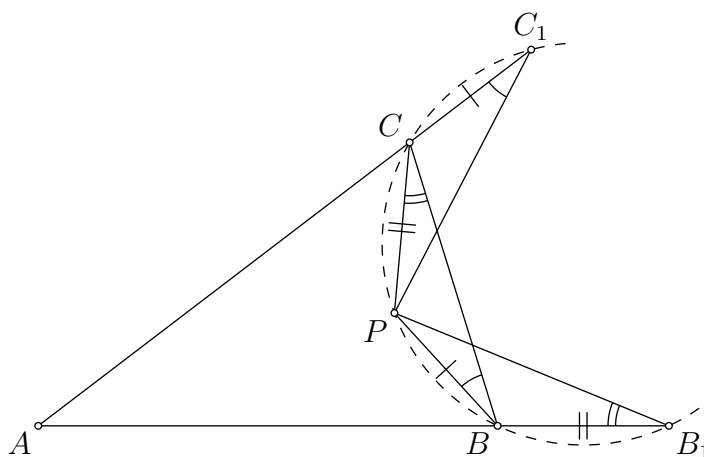
Konačno je

$$\frac{|AB|}{|AC| + |PB|} = \frac{|AB|}{|AS|} = \frac{|AC|}{|AR|} = \frac{|AC|}{|AB| + |PC|},$$

što je i trebalo dokazati.

Drugo rješenje.

Uz iste oznake za veličine kutova trokuta ABC i uvjet $3\varphi = \beta + \gamma$ kao u prvom rješenju, označimo s B_1 točku na produžetku stranice \overline{AB} preko vrha B za koju je $|BB_1| = |PC|$, a s C_1 točku na produžetku stranice \overline{AC} preko vrha C za koju je $|CC_1| = |PB|$.



S obzirom da je

$$\begin{aligned} \sphericalangle BPC &= 180^\circ - (\beta - \varphi) - (\gamma - \varphi) = 180^\circ - \varphi, \\ \sphericalangle PBB_1 &= (\beta - \varphi) + (180^\circ - \beta) = 180^\circ - \varphi, \\ \sphericalangle PCC_1 &= (\gamma - \varphi) + (180^\circ - \gamma) = 180^\circ - \varphi, \end{aligned}$$

trokuti BPC , PBB_1 i C_1CP su sukladni.

Stoga iz

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle CC_1P = \beta - \varphi \quad \text{i} \quad \sphericalangle BCP = \sphericalangle PB_1B = \gamma - \varphi$$

zaključujemo da su točke C_1 , C , P , B i B_1 konciklične.

Konačno, iz potencije točke A s obzirom na kružnicu opisanu četverokutu C_1CBB_1 slijedi:

$$\begin{aligned} |AB| |AB_1| &= |AC| |AC_1|, \\ |AB| (|AB| + |BB_1|) &= |AC| (|AC| + |CC_1|), \\ |AB| (|AB| + |PC|) &= |AC| (|AC| + |PB|), \\ \frac{|AB|}{|AC| + |PB|} &= \frac{|AC|}{|AB| + |PC|}, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Treće rješenje.

Uz uobičajene oznake za duljine stranica i veličine kutova trokuta ABC , neka je $\sphericalangle PCA = \sphericalangle PBA = \varphi$. Zadano je $3\varphi = \beta + \gamma$.

U trokutu BCP imamo:

$$\sphericalangle PBC = \beta - \varphi, \quad \sphericalangle PCB = \gamma - \varphi,$$

$$\sphericalangle BPC = 180^\circ - (\beta - \varphi) - (\gamma - \varphi) = 180^\circ - (\beta + \gamma) + 2\varphi = 180^\circ - \varphi,$$

stoga primjenom poučka o sinusima u tom trokutu dobivamo

$$\frac{|PB|}{|BC|} = \frac{\sin(\gamma - \varphi)}{\sin \varphi}, \quad \frac{|PC|}{|BC|} = \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin \varphi},$$

odnosno

$$|PB| = \frac{a}{\sin \varphi} \sin(\gamma - \varphi), \quad |PC| = \frac{a}{\sin \varphi} \sin(\beta - \varphi).$$

Zato je jednakost

$$\frac{|AB|}{|AC| + |PB|} = \frac{|AC|}{|AB| + |PC|}$$

redom ekvivalentna s

$$c \left(c + \frac{a}{\sin \varphi} \sin(\beta - \varphi) \right) = b \left(b + \frac{a}{\sin \varphi} \sin(\gamma - \varphi) \right),$$

$$c^2 - b^2 = \frac{a}{\sin \varphi} (b \sin(\gamma - \varphi) - c \sin(\beta - \varphi)).$$

Dijeljenjem s $4R^2$, gdje je R polumjer kružnice opisane trokutu ABC , zbog poučka o sinusima dobivamo

$$\sin^2 \gamma - \sin^2 \beta = \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} (\sin \beta \sin(\gamma - \varphi) - \sin \gamma \sin(\beta - \varphi))$$

pa je tražena jednakost dalje ekvivalentna s

$$\sin^2 \gamma - \sin^2 \beta = \frac{\sin \alpha}{2 \sin \varphi} (\cos(\beta - \gamma + \varphi) - \cos(\gamma - \beta + \varphi)),$$

$$(\sin \gamma + \sin \beta) (\sin \gamma - \sin \beta) = \frac{\sin \alpha}{2 \sin \varphi} \cdot 2 \sin \varphi \sin(\gamma - \beta),$$

$$2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \cos \frac{\gamma - \beta}{2} \cdot 2 \cos \frac{\gamma + \beta}{2} \sin \frac{\gamma - \beta}{2} = \sin \alpha \sin(\gamma - \beta),$$

$$\sin(\gamma + \beta) \sin(\gamma - \beta) = \sin(\gamma + \beta) \sin(\gamma - \beta),$$

čime je tvrdnja dokazana.

Zadatak 4.

Dokaži da ne postoje prosti broj p i prirodni brojevi a i n ($n \geq 2$) takvi da vrijedi

$$2^p + 3^p = a^n.$$

Rješenje.

Ako je $p = 2$, onda je $2^p + 3^p = 13$ pa bismo imali $n = 1$, što je suprotno pretpostavci zadatka.

Pretpostavimo da je $p > 2$ i neka je $2^p + 3^p = a^n$ za neki prirodni broj $n > 1$.

Kako je p neparan broj, to je

$$a^n = 2^p + 3^p = (2 + 3) (2^{p-1} - 2^{p-2} \cdot 3 + \dots - 2 \cdot 3^{p-2} + 3^{p-1})$$

pa je a djeljiv s 5. Broj na desnoj strani je zato djeljiv s 5^n . Kako je $n > 1$, taj broj je djeljiv (barem) s 25 pa zaključujemo da izraz u drugoj zagradi na desnoj strani mora biti djeljiv s 5.

S obzirom da je $3 \equiv -2 \pmod{5}$ imamo:

$$2^{p-1} - 2^{p-2} \cdot 3 + \dots - 2 \cdot 3^{p-2} + 3^{p-1} \equiv 2^{p-1} + 2^{p-2} \cdot 2 + \dots + 2 \cdot 2^{p-2} + 2^{p-1} \equiv p \cdot 2^{p-1} \pmod{5}.$$

Slijedi da je p djeljiv s 5, a budući da je p prost broj, preostaje samo mogućnost $p = 5$. Međutim,

$$2^5 + 3^5 = 275 = 5^2 \cdot 11$$

što nije broj oblika a^n za $n > 1$.