Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

IZBORNO NATJECANJE – drugi dio

8. svibnja 2010.

1. Neka je $n \geqslant 4$ prirodni broj i neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realni brojevi takvi da je

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqslant n \qquad \text{i} \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geqslant n^2.$$

Dokaži da postoji $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da je $x_i \geqslant 2$.

2. U svakom vrhu pravilnog n-terokuta $A_1A_2\ldots A_n$ nalazi se određeni broj novčića: u vrhu A_k nalazi se točno k novčića, za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$. U svakom koraku radimo sljedeću transformaciju: odabiremo dva novčića (ne nužno iz istog vrha) i prebacujemo svakog od njih u susjedni vrh, tako da jednog pomičemo u smjeru kretanja kazaljke na satu, a drugog u smjeru suprotnom od smjera kretanja kazaljke na satu.

Odredi za koje brojeve n je moguće postići da nakon konačnog broja koraka za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$ u vrhu A_k bude točno $n + 1 - k$ novčića.

3. Zadan je šiljastokutni trokut ABC. Neka su točke B' i C' simetrične točkama B i C u odnosu na pravce AC i AB redom. Ako se kružnice opisane trokutima ABB' i ACC' sijeku još u točki P, dokaži da pravac AP prolazi središtem opisane kružnice trokuta ABC.

4. Dokaži da ne postoji beskonačni niz prostih brojeva $p_0, p_1, p_2, \ldots$ takav da za svaki prirodni broj k vrijedi

$$p_k = 2p_{k-1} + 1 \qquad \text{ili} \qquad p_k = 2p_{k-1} - 1.$$

IZBORNO NATJECANJE 2010. – drugi dio

rješenja zadataka

Zadatak 1.

Neka je $n \geqslant 4$ prirodni broj i neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realni brojevi takvi da je

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqslant n \qquad \text{i} \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geqslant n^2.$$

Dokaži da postoji $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da je $x_i \geqslant 2$.

Rješenje.

Pretpostavimo da postoje brojevi

$$x_1 < 2, \quad x_2 < 2, \quad \ldots, \quad x_n < 2$$

koji zadovoljavaju dane uvjete.

Kad bi vrijedilo $|x_i| < 2$ za sve $i = 1, \ldots, n$, imali bismo

$$n^2 \leqslant x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 4n,$$

tj. $n < 4$, što je kontradikcija. Zaključujemo da je barem jedan od promatranih brojeva manji od -2.

Neka su, bez smanjenja općenitosti, $x_1, \ldots, x_k$ nenegativni, a $x_{k+1}, \ldots, x_n$ negativni. Pritom je $k \leqslant n - 1$.

Tada vrijedi

$$0 < -\left(x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n\right) \leqslant \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_k\right) - n < 2k - n.$$

Iz toga dobivamo

$$\begin{aligned} n^2 &\leqslant x_1^2 + \cdots + x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2 \\ &< 4k + \left(|x_{k+1}| + \cdots + |x_n|\right)^2 \\ &< 4k + (2k - n)^2 = 4k\left(k + 1 - n\right), \end{aligned}$$

što je ekvivalentno s $k > n - 1$.

Dobili smo kontradikciju pa je početna pretpostavka bila pogrešna. Time je tvrdnja dokazana.

Zadatak 2.

U svakom vrhu pravilnog n-terokuta $A_1A_2\ldots A_n$ nalazi se određeni broj novčića: u vrhu A_k nalazi se točno k novčića, za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$. U svakom koraku radimo sljedeću transformaciju: odabiremo dva novčića (ne nužno iz istog vrha) i prebacujemo svakog od njih u susjedni vrh, tako da jednog pomičemo u smjeru kretanja kazaljke na satu, a drugog u smjeru suprotnom od smjera kretanja kazaljke na satu.

Odredi za koje brojeve n je moguće postići da nakon konačnog broja koraka za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$ u vrhu A_k bude točno $n + 1 - k$ novčića.

Rješenje.

Neka je a_k broj novčića u vrhu A_k. Promotrimo što se događa s izrazom

$$S = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$$

prilikom izvršavanja transformacije iz zadatka.

Ukoliko ne dolazi do prelaska novčića iz vrha A_1 u A_n ni obratno, onda postoje brojevi i, j ($i > 1$, $j < n$) takvi da novčić iz vrha A_i prelazi u vrh A_{i-1}, dok novčić iz vrha A_j prelazi u vrh A_{j+1}. Nakon izvršene transformacije vrijednost izraza S se promijeni za:

$$\begin{aligned}\Delta S = &-(i-1)a_{i-1} - ia_i - ja_j - (j+1)a_{j+1} \\ &+ (i-1)(a_{i-1}+1) + i(a_i - 1) + j(a_j - 1) + (j+1)(a_{j+1}+1) = 0.\end{aligned}$$

Ako novčić iz vrha A_n prelazi u vrh A_1, dok drugi novčić prelazi iz nekog vrha i ($i > 1$) u vrh A_{i-1}, onda se vrijednost izraza S promijeni za:

$$\begin{aligned}\Delta S = &- na_n - a_1 - (i-1)a_{i-1} - ia_i \\ &+ n(a_n - 1) + (a_1 + 1) + (i-1)(a_i + 1) + i(a_i - 1) = -n.\end{aligned}$$

Obratno, ako novčić iz vrha A_1 prelazi u vrh A_n, dok drugi novčić prelazi iz nekog vrha i ($i < 1$) u vrh A_{i+1}, onda se vrijednost izraza S promijeni za:

$$\begin{aligned}\Delta S = &- na_n - a_1 - (i-1)a_{i-1} - ia_i \\ &+ n(a_n + 1) + (a_1 - 1) + i(a_i - 1) + (i+1)(a_i + 1) = n.\end{aligned}$$

Konačno, ukoliko novčić iz vrha A_1 prijeđe u vrh A_n i istovremeno novčić iz vrha A_n prijeđe u vrh A_1 tada očito vrijednost izraza S ostaje nepromijenjena.

Zaključujemo da se izraz S u svakom slučaju promijeni za višekratnik broja n pa je ostatak pri dijeljenju broja S brojem n invarijanta.

Označimo sa S_P početnu vrijednost izraza S te sa S_K vrijednost koju poprimi izraz S ukoliko dođe do konačnog rasporeda opisanog u zadatku.

Tada vrijedi:

$$S_P = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + n \cdot n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

i

$$S_K = 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + \cdots + n \cdot 1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Da bi se traženi konačni raspored mogao postići razlika $S_K - S_P$ treba biti djeljiva s n.

Međutim, ta razlika je jednaka

$$S_K - S_P = -\frac{(n-1)n(n+1)}{6},$$

a taj broj ne može biti djeljiv s n ukoliko n nije relativno prost sa 6.

Zaključujemo da je nužni uvjet da bi se traženi konačni raspored mogao postići da je n relativno prost sa 6, tj. da je n oblika $6k+1$ ili $6k+5$.

Dokažimo da je to i dovoljni uvjet. Pretpostavimo da je n oblika $6k \pm 1$. Tada je n neparan pa postoji prirodni broj m takav da je $n = 2m + 1$.

U vrhu A_1 se na početku nalazi 1 novčić, a na kraju u tome vrhu želimo n novčića što znači da nam nedostaje $n-1$ novčića. S druge strane, u vrhu A_n ima $n-1$ novčića viška. Slično, u vrhu A_2 nam nedostaje $n-3$ novčića, a u vrhu A_{n-1} ima upravo toliko novčića viška. Na taj način možemo vrhove rasporediti u m parova tako prvom vrhu svakog para nedostaje upravo onoliko novčića koliko drugi vrh toga para ima viška. (U vrhu A_{m+1} se na početku nalazi $m+1$ novčić, što je upravo broj novčića koji želimo u tom vrhu na kraju.)

Pogledajmo koliko bismo poteza morali napraviti u jednom smjeru da bismo u svakom paru prebacili odgovarajući broj novčića. Za par (A_1, A_n) imamo $n-1$ novčića koji trebaju prijeći udaljenost 1, za par $(A_2, A_n - 1)$ imamo $n-3$ novčića koji trebaju prijeći udaljenost 3, itd.

Ukupan broj poteza u jednom smjeru potrebnih da bi u svakom polju bio odgovarajući broj novčića je

$$X = 1 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-3) + \cdots + (n-2) \cdot 2 = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

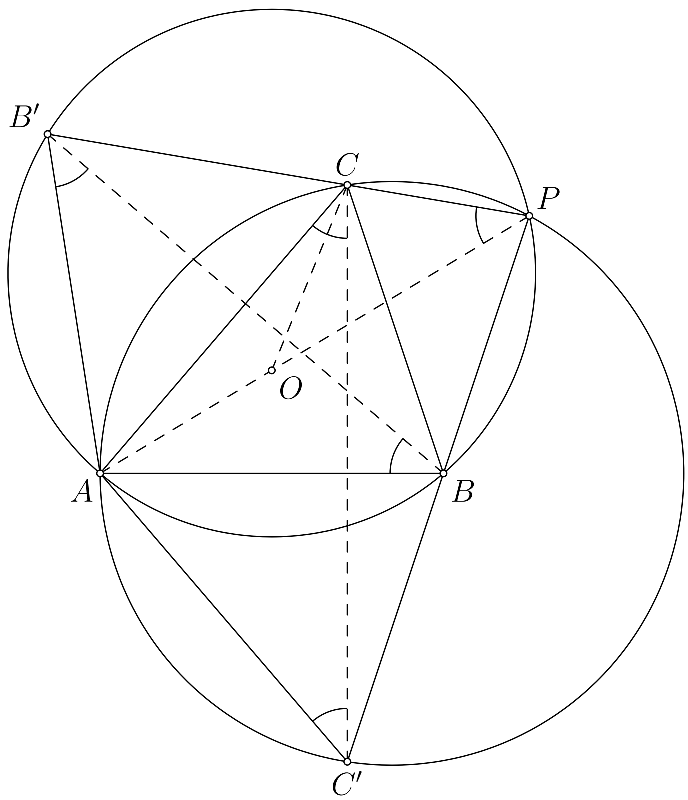
Dakle, odabirom ovih X poteza u jednom smjeru možemo postići da se u svakom vrhu nalazi željeni broj novčića. Preostaje nam dokazati da je moguće napraviti X poteza u suprotnom smjeru koji neće promijeniti raspored novčića.

Primijetimo da je X djeljiv s n zbog uvjeta da je n relativno prost sa 6. Neka je $X = qn$. Tada traženih X poteza u suprotnom smjeru napravimo tako da odaberemo proizvoljni novčić i njega zavrtimo q punih krugova. Lako vidimo da redoslijed ovakih poteza u jednom i drugom smjeru možemo složiti tako da radimo istovremeno po jedan potez u svakom smjeru.

Zadatak 3.

Zadan je šiljastokutni trokut ABC. Neka su točke B' i C' simetrične točkama B i C u odnosu na pravce AC i AB redom. Ako se kružnice opisane trokutima ABB' i ACC' sijeku još u točki P, dokaži da pravac AP prolazi središtem opisane kružnice trokuta ABC.

Rješenje.



Označimo veličine kutova trokuta ABC na uobičajeni način s α, β i γ.

Neka je točka O središte opisane kružnice trokuta ABC.

Trokut OAC je jednakokračan i vrijedi $\sphericalangle CAO = 90° - \beta$.

Trokuti ABB' i ACC' su zbog simetrije jednakokračni, odakle imamo

$$\sphericalangle ABB' = \sphericalangle AB'B = 90° - \alpha,$$

$$\sphericalangle ACC' = \sphericalangle AC'C = 90° - \alpha.$$

Četverokuti $ABPB'$ i $AC'PC$ su tetivni, a nad odgovarajućim tetivama $\overline{AB'}$ i $\overline{AC}$ imamo jednake obodne kutove:

$$\sphericalangle APB' = \sphericalangle ABB' = 90° - \alpha, \quad \sphericalangle APC = \sphericalangle AC'C = 90° - \alpha.$$

Odavde slijedi da su točke B', C i P kolinearne.

Konačno je

$$\begin{aligned}
\sphericalangle CAP &= \sphericalangle B'CA - \sphericalangle APB' \\
&= \gamma - (90^\circ - \alpha) \\
&= \alpha + \gamma - 90^\circ \\
&= 90^\circ - \beta \\
&= \sphericalangle CAO,
\end{aligned}$$

odnosno točke A, O i P su kolinearne, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 4.

Dokaži da ne postoji beskonačni niz prostih brojeva $p_0, p_1, p_2, \ldots$ takav da za svaki prirodni broj k vrijedi

$$p_k = 2p_{k-1} + 1 \qquad \text{ili} \qquad p_k = 2p_{k-1} - 1.$$

Rješenje.

Pretpostavimo da takav niz postoji.

Označimo $p = p_0$. Provjerom se pokaže da p mora biti veći od 3. Dakle, mora vrijediti $p \equiv 1 \pmod 3$ ili $p \equiv 2 \pmod 3$.

Pretpostavimo $p \equiv 1 \pmod 3$. Tada je $2p + 1$ djeljivo s 3 pa mora vrijediti $p_1 = 2p - 1$ i $p_1 \equiv 1 \pmod 3$. Induktivno zaključujemo $p_k \equiv 1 \pmod 3$, $p_{k+1} = 2p_k - 1$, odnosno

$$p_k = 2p_{k-1} - 1 = 2(2p_{k-2} - 1) - 1 = \ldots = 2^k p - 1 - 2 - \cdots - 2^{k-1} = 2^k p - (2^k - 1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Budući da je $p > 3$, po malom Fermatovom teoremu vrijedi $2^{p-1} \equiv 1 \pmod 3$,
tj. $p \mid 2^{p-1} - 1$ pa je p_{p-1} djeljiv s p. Kontradikcija.

U slučaju $p \equiv 2 \pmod 3$ analogno mora vrijediti $p_{k+1} = 2p_k + 1$, tj. $p_k = 2^k p + (2^k - 1)$ i opet vidimo da je p_{p-1} djeljiv s p.

Dakle, takav niz ne postoji.