Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

IZBORNO NATJECANJE – prvi dio

30. travnja 2010.

1. Postoji li funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ za koju vrijedi

$$f(f(n)) = f(n+1) - f(n)$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$?

2. Dan je pravokutni trokut i konačan skup točaka u njemu. Dokaži da se ove točke mogu povezati izlomljenom linijom (ne nužno zatvorenom) tako da je suma kvadrata duljina segmenata izlomljene linije manja ili jednaka kvadratu duljine hipotenuze danog trokuta.

3. Neka je D točka na stranici $\overline{AC}$ trokuta ABC. Neka su E i F točke na dužinama $\overline{BD}$ i $\overline{BC}$ redom, takve da je $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CAF$. Neka su P i Q točke na dužinama $\overline{BC}$ i $\overline{BD}$ redom, takve da je $EP \parallel CD$ i $FQ \parallel CD$. Dokaži da je $\sphericalangle BAP = \sphericalangle CAQ$.

4. Za dani prirodni broj n neka je a najveći prirodni broj za koji je broj $5^n - 3^n$ djeljiv s 2^a, te neka je b najveći prirodni broj takav da je $2^b \leqslant n$. Dokaži da je $a \leqslant b + 3$.

IZBORNO NATJECANJE 2010. – prvi dio

rješenja zadataka

Zadatak 1.

Postoji li funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ za koju vrijedi

$$f(f(n)) = f(n+1) - f(n)$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$?

Prvo rješenje.

Pretpostavimo da postoji tražena funkcija. Iz zadanog uvjeta imamo:

$$f(n+1) - f(n) = f(f(n)) \geqslant 1,$$

iz čega zaključujemo da je funkcija strogo rastuća. Zbog toga je $f(n) \geqslant n$ za svaki prirodni broj n. Sada imamo:

$$f(n+1) = f(n) + f(f(n)) \geqslant n + f(n) \geqslant 2n,$$

iz čega slijedi

$$f(n) \geqslant 2(n-1) = 2n - 2.$$

S druge strane,

$$f(f(n)) = f(n+1) - f(n) < f(n+1),$$

a budući da je funkcija f rastuća iz toga slijedi:

$$f(n) < n + 1.$$

Dakle,

$$2n - 2 \leqslant f(n) < n + 1,$$

a to očito nije moguće za proizvoljni prirodni broj n pa zaključujemo da ne postoji funkcija s traženim svojstvima.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju zaključujemo da je funkcija strogo rastuća.

Označimo $a = f(1)$. Uvrštavanjem $n = 1$ u dani uvjet dobivamo da je $f(a) = f(2) - a$ iz čega slijedi da je $f(a) < f(2)$. Zato je $a < 2$ (budući da je funkcija f rastuća). Zaključujemo da je $a = 1$, tj. $f(1) = 1$. Tada je $f(2) = a + f(a) = 2$.

Uvrštavanjem $n = 2$ u uvjet zadatka dobivamo

$$f(f(2)) = f(3) - f(2),$$

odnosno

$$f(3) = 4.$$

Napoljetku, uvrstimo $n = 3$ u uvjet zadatka:

$$\begin{aligned} f(f(3)) &= f(4) - f(3), \\ f(4) &= f(4) - 4, \\ 0 &= -4. \end{aligned}$$

Zaključujemo da ne postoji funkcija s traženim svojstvima.

Zadatak 2.

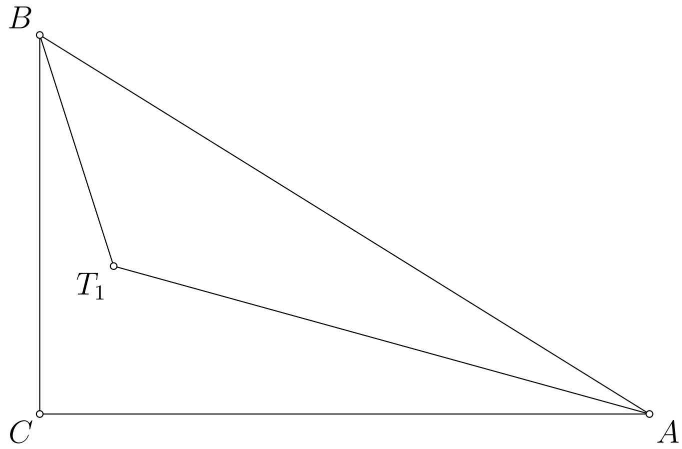
Dan je pravokutni trokut i konačan skup točaka u njemu. Dokaži da se ove točke mogu povezati izlomljenom linijom (ne nužno zatvorenom) tako da je suma kvadrata duljina segmenata izlomljene linije manja ili jednaka kvadratu duljine hipotenuze danog trokuta.

Rješenje.

Koristit ćemo činjenice da je $|XY|^2 \leqslant |XZ|^2 + |YZ|^2$ ako je $\sphericalangle XZY \leqslant 90^\circ$ i $|XY|^2 \geqslant |XZ|^2 + |YZ|^2$ ako je $\sphericalangle XZY \geqslant 90^\circ$.

Indukcijom po broju točaka n ćemo dokazati nešto jaču tvrdnju: Postoji izlomljena linija čiji su početak i kraj rubne točke hipotenuze i koja spaja danih n točaka tako da je suma kvadrata duljina segmenata izlomljene linije manja ili jednaka kvadratu duljine hipotenuze danog trokuta.

Neka je dani trokut ABC s pravim kutom u vrhu C.
Za $n = 1$, neka se unutar trokuta nalazi točka T_1.



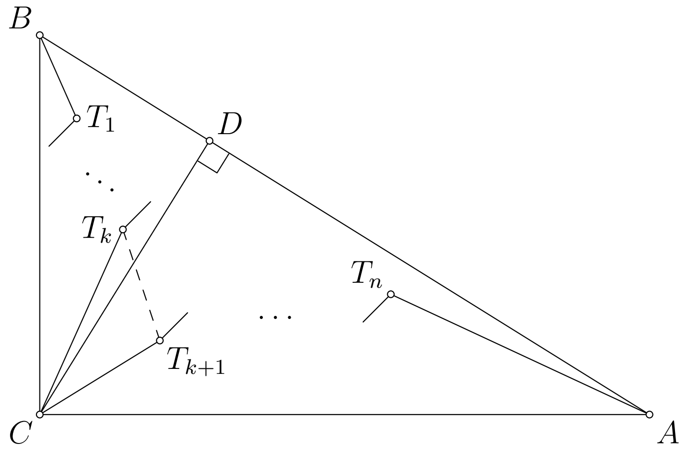
Tada je $|AT_1|^2 + |BT_1|^2 \leqslant |AB|^2$ jer je $\sphericalangle AT_1B \geqslant 90^\circ$. Time je dokazana baza indukcije.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi ako je broj točaka manji od n. Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za n točaka. Visinom $\overline{CD}$ podijelimo trokut ABC na dva manja trokuta koja su mu slična.

Ukoliko danih točaka ima u oba manja trokuta prema pretpostavci indukcije u svakom od njih tada postoji izlomljena linija koja zadovoljava uvjete zadatka. (Ukoliko se neke točke nalaze na samoj visini smatramo da svaka od njih pripada trokutu BCD, ali ne i trokutu CAD.) Označimo točke u trokutu BCD s $T_1, T_2, \dots, T_k$ tako da je $BT_1T_2 \dots T_kC$ linija iz pretpostavke indukcije. Na analogni način označimo točke $T_{k+1}, T_{k+2}, \dots, T_n$ u trokutu CAD.

Prema pretpostavci indukcije je

$$\begin{aligned} |AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2 \geqslant &\left(|BT_1|^2 + |T_1T_2|^2 + \cdots + |T_{k-1}T_k|^2 + |T_kC|^2\right) \\ &+ \left(|CT_{k+1}|^2 + |T_{k+1}T_{k+2}|^2 + \cdots + |T_{n-1}T_n|^2 + |T_nA|^2\right). \end{aligned}$$

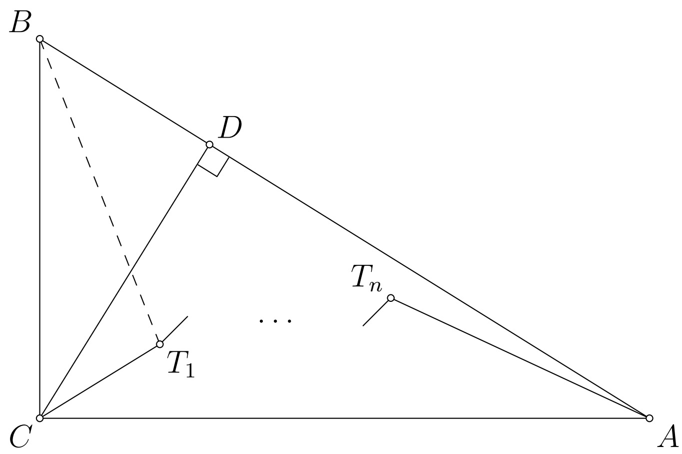


Nadalje, $\sphericalangle T_kCT_{k+1} \leqslant 90^\circ$ pa je $|T_kC|^2 + |CT_{k+1}|^2 \geqslant |T_kT_{k+1}|^2$. Odavde dobivamo:

$$|AB|^2 \geqslant |BT_1|^2 + |T_1T_2|^2 + \cdots + |T_{n-1}T_n|^2 + |T_nA|^2,$$

što je i trebalo dokazati.

Ostaje nam dokazati da tvrdnja vrijedi i u slučaju da jedan od dva manja trokuta ne sadrži nijednu od danih točaka. Pretpostavimo da je to trokut BCD.



U tom slučaju spustimo visinu iz vrha D u trokutu CAD. Ukoliko se ni u tom trokutu točke ne nalaze s obje strane visine, postupak nastavljamo dok ne dobijemo trokut u kojem to vrijedi. (Taj postupak će očito završiti nakon konačnog broja koraka.)

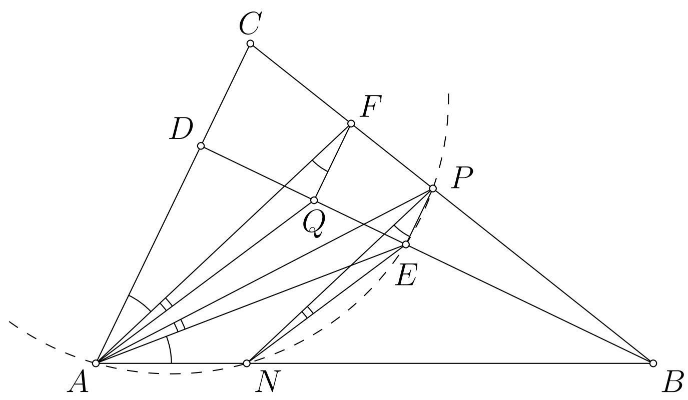
Sada na trokut CAD (ili na dobiveni manji trokut) primijenimo prije opisani algoritam i dobijemo izlomljenu liniju $CT_1T_2 \ldots T_nA$ kojoj je suma kvadrata duljina segmenata najviše $|AC|^2$. Međutim, $|BT_1|^2 - |CT_1|^2 \leqslant |BC|^2$ pa vidimo da je suma kvadrata duljina segmenata izlomljene linije $BT_1T_2 \ldots T_nA$ najviše $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$.

Time smo dokazali korak indukcije pa tvrdnja vrijedi neovisno o broju točaka.

Zadatak 3.

Neka je D točka na stranici $\overline{AC}$ trokuta ABC. Neka su E i F točke na dužinama $\overline{BD}$ i $\overline{BC}$ redom, takve da je $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CAF$. Neka su P i Q točke na dužinama $\overline{BC}$ i $\overline{BD}$ redom, takve da je $EP \parallel CD$ i $FQ \parallel CD$. Dokaži da je $\sphericalangle BAP = \sphericalangle CAQ$.

Prvo rješenje.



Neka je točka N na stranici $\overline{AB}$ takva da je NE paralelno s AQ. Tada su trokuti NEP i AQF slični (svi odgovarajući kutovi su im sukladni i vrijedi $PE \parallel FQ$).

Tada je

$$\begin{aligned} \sphericalangle EPN &= \sphericalangle QFA && \text{(spomenuta sličnost)} \\ &= \sphericalangle FAC && \text{(kutovi s paralelnim kracima)} \\ &= \sphericalangle EAN && \text{(pretpostavka zadatka)} \end{aligned}$$

pa je $APEN$ tetivni četverokut.

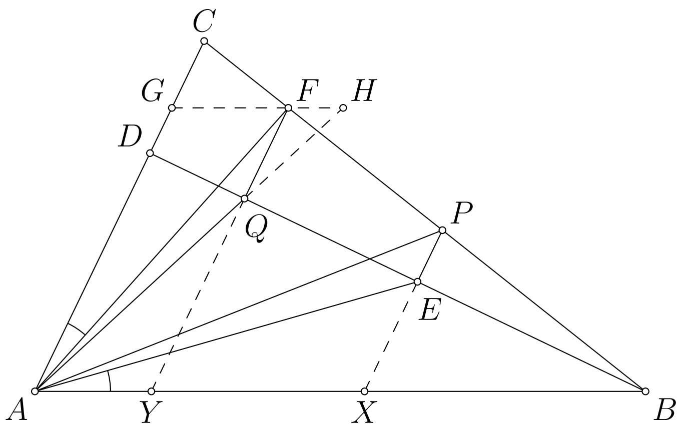
Sada je $\sphericalangle PAE = \sphericalangle PNE = \sphericalangle FAQ$.

Konačno,

$$\sphericalangle CAQ = \sphericalangle CAF + \sphericalangle FAQ = \sphericalangle BAE + \sphericalangle EAP = \sphericalangle BAP$$

i tvrdnja je dokazana.

Drugo rješenje.



Neka pravci PE i FQ sijeku AB u točkama X i Y redom.

Budući je $PX \parallel FY$, a pravci FP, QE i YX prolaze istom točkom B, iz Talesovog teorema imamo

$$\frac{|XE|}{|XP|} = \frac{|YQ|}{|YF|}. \tag{1}$$

Neka pravac kroz F paralelan s AB siječe AC i AQ u G i H redom.

Kako je $AY \parallel FH$ i $QF \parallel AG$, vrijedi

$$\frac{|YQ|}{|YF|} = \frac{|AQ|}{|AH|} = \frac{|GF|}{|GH|}. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) slijedi

$$\frac{|XE|}{|XP|} = \frac{|GF|}{|GH|}. \tag{3}$$

Budući da je $XE \parallel AG$ i $AX \parallel GF$, vrijedi

$$\sphericalangle AXP = \sphericalangle AGF. \tag{4}$$

S obzirom da je $\sphericalangle XAE = \sphericalangle BAE = \sphericalangle CAF = \sphericalangle GAF$, iz (4) dobivamo da su trokuti $\triangle AXE$ i $\triangle AGF$ slični. Iz toga i (3) slijedi da su trokuti $\triangle AXP$ i $\triangle AGH$ slični. Tako dobivamo $\sphericalangle XAP = \sphericalangle GAH$, a to povlači $\sphericalangle BAP = \sphericalangle CAQ$.

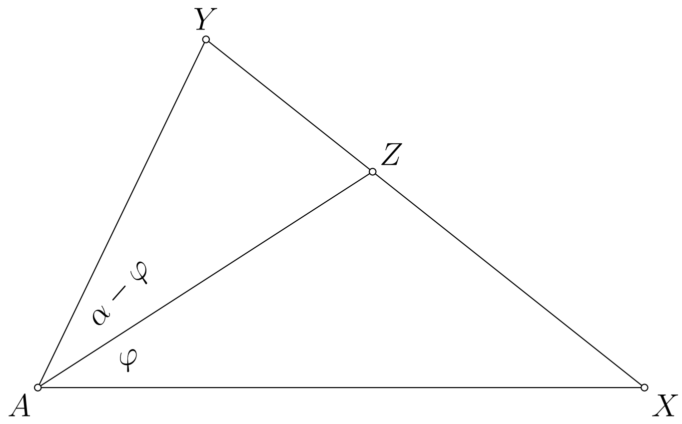
Treće rješenje.

Dokažimo najprije sljedeću lemu.

Lema. U trokutu AXY na stranici $\overline{XY}$ odabrana je točka Z i označeni su kutovi $\sphericalangle XAZ = \varphi$, $\sphericalangle XAY = \alpha$. Tada je

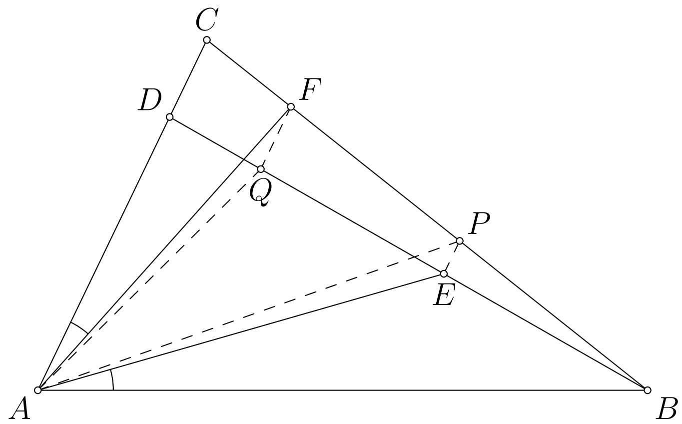
$$\frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha-\varphi)} = \frac{|XZ|}{|YZ|}\cdot\frac{|AY|}{|AX|}.$$

Dokaz leme.



Primjenimo poučak o sinusima na trokute AXZ i AYZ, iskoristimo činjenicu da je $\sin\sphericalangle AZY = \sin\sphericalangle AZX$ jer je $\sphericalangle AZY + \sphericalangle AZX = 180°$ te dobivamo

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha-\varphi)} = \frac{|XZ|\cdot\dfrac{\sin\sphericalangle AZX}{|AX|}}{|YZ|\cdot\dfrac{\sin\sphericalangle AZY}{|AY|}} = \frac{|XZ|}{|YZ|}\cdot\frac{|AY|}{|AX|}.$$



Iz Talesovog teorema o proporcionalnosti, zbog $EP \parallel FQ \parallel CD$ slijedi

$$\frac{|BE|}{|DE|} = \frac{|BP|}{|CP|} \quad \text{i} \quad \frac{|CF|}{|BF|} = \frac{|DQ|}{|BQ|}.$$

Sada primjenom prije dokazane leme na sljedeće izbore trokuta i točaka, redom:

$$\triangle ABC,\ P; \quad \triangle ABD,\ E; \quad \triangle ACB,\ F; \quad \triangle ADB,\ Q,$$

te koristeći uvjet zadatka $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CAF$, dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\sphericalangle BAP}{\sin(\alpha - \sphericalangle BAP)} &= \frac{|BP|}{|CP|}\cdot\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|BE|}{|DE|}\cdot\frac{|AC|}{|AB|}\\
&= \frac{|BE|}{|DE|}\cdot\frac{|AD|}{|AB|}\cdot\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{\sin\sphericalangle BAE}{\sin(\alpha-\sphericalangle BAE)}\cdot\frac{|AC|}{|AD|}\\
&= \frac{\sin\sphericalangle CAF}{\sin(\alpha-\sphericalangle CAF)}\cdot\frac{|AC|}{|AD|}\\
&= \frac{|CF|}{|BF|}\cdot\frac{|AB|}{|AC|}\cdot\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|CF|}{|BF|}\cdot\frac{|AB|}{|AD|}\\
&= \frac{|DQ|}{|BQ|}\cdot\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{\sin\sphericalangle DAQ}{\sin(\alpha-\sphericalangle DAQ)}.
\end{aligned}$$

Označimo $\alpha = \sphericalangle BAC$, $x_1 = \sphericalangle BAP$ i $x_2 = \sphericalangle DAQ$. Očito je $x_1 \neq \alpha$, $x_2 \neq \alpha$. Tada vrijedi:

$$\frac{\sin x_1}{\sin(\alpha - x_1)} = \frac{\sin x_2}{\sin(\alpha - x_2)},$$

$$\sin x_1(\sin\alpha\cos x_2 - \cos\alpha\sin x_2) = \sin x_2(\sin\alpha\cos x_1 - \cos\alpha\sin x_1),$$

$$\sin\alpha(\sin x_1\cos x_2 - \sin x_2\cos x_1) = 0,$$

$$\sin\alpha\sin(x_1 - x_2) = 0.$$

Budući su α, x_1, x_2 kutovi u trokutu, jedina mogućnost je $x_1 = x_2$, što znači da mora biti $\sphericalangle BAP = \sphericalangle DAQ$, a to je i trebalo dokazati.

Zadatak 4.

Za dani prirodni broj n neka je a najveći prirodni broj za koji je broj $5^n - 3^n$ djeljiv s 2^a, te neka je b najveći prirodni broj takav da je $2^b \leqslant n$. Dokaži da je $a \leqslant b + 3$.

Rješenje.

Za dani prirodni broj n, označimo s $f(n)$ najveći prirodni broj takav da je broj $5^n - 3^n$ djeljiv s $2^{f(n)}$. Treba dokazati da je $f(n) \leqslant b + 3$.

Dokažimo prvo da je $f(2^n) = n + 3$. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

Za $n = 1$ najveća potencija broja 2 koja dijeli broj $5^{2^1} - 3^{2^1} = 16$ je upravo 2^4, dakle, $f(2^1) = 4$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$.

Za $n = k + 1$, promotrimo najveću potenciju koja dijeli broj $5^{2^{k+1}} - 3^{2^{k+1}}$. Taj broj možemo zapisati na sljedeći način:

$$5^{2^{k+1}} - 3^{2^{k+1}} = 5^{2^k \cdot 2} - 3^{2^k \cdot 2} = \left(5^{2^k} - 3^{2^k}\right)\left(5^{2^k} + 3^{2^k}\right).$$

Po pretpostavci indukcije, najveća potencija broja 2 koja dijeli prvu zagradu je $f(2^k) = k+3$, dok je najveća potencija broja 2 koja dijeli drugu zagradu 2^1. Naime, $5 \equiv 1 \pmod 4$, pa je $5^{2^k} \equiv 1 \pmod 4$. S druge strane, $3 \equiv -1 \pmod 4$, pa je i $3^{2^k} \equiv 1 \pmod 4$. Zbog toga je $5^{2^k} + 3^{2^k} \equiv 2 \pmod 4$, što znači da je taj broj djeljiv s 2, ali nije djeljiv s 4. Slijedi da je $f(2^{k+1}) = f(2^k) + 1 = k + 4$, što je i trebalo dokazati.

Neka je sada $n = 2^m \cdot k$, za neki nenegativni cijeli broj m i neparni prirodni broj k. Očito je $2^m \leqslant n$ pa je $m \leqslant b$. Sada imamo:

$$5^n - 3^n = 5^{2^m \cdot k} - 3^{2^m \cdot k} = \left(5^{2^m} - 3^{2^m}\right) \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \left(5^{2^m}\right)^i \left(3^{2^m}\right)^{k-1-i}.$$

Svaki od pribrojnika u sumi na desnoj strani je neparan pa je cijela suma neparna jer sadrži neparni broj neparnih pribrojnika. Dakle, najveća potencija broja 2 koja dijeli cijeli umnožak je jednaka najvećoj potenciji koja dijeli prvu zagradu. Zaključujemo da je $f(n) = f(2^m)$. Sada imamo:

$$f(n) = f(2^m) = m + 3 \leqslant b + 3,$$

što je i trebalo dokazati.