MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
AGENCIJA ZA ODGOJ I OBRAZOVANJE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE
IZ MATEMATIKE
4. veljače 2010.

8. razred-osnovna škola

**Zadaci za 4 boda:**

**1.** Odredi još dva broja koji nastavljaju započeti niz brojeva 3, 6, 24, 192, …
Postupak obrazloži.

**2.** Koliko znamenaka u dekadskom zapisu ima broj $10\,000^{9999}$?

**3.** Duljine dijagonala romba iznose $\sqrt{2010}+\sqrt{2002}$ cm i $\sqrt{2010}-\sqrt{2002}$ cm. Izračunaj površinu tog romba.

**4.** Skrati razlomak: $\dfrac{4a^2-4ab}{a^3-ab^2}$.

**5.** Za koji realan broj $a$ izraz $a^2 - 4a + 2010$ ima najmanju vrijednost? Kolika je najmanja vrijednost?

**Zadaci za 10 bodova:**

**6.** Duljine kateta $a$ i $b$ pravokutnog trokuta $ABC$ odnose se kao 8 : 15, a njegov opseg iznosi 100 cm. Izračunaj duljine svih stranica tog trokuta.

**7.** Kvadrat nekog cijelog broja za 49 je veći od razlike trostrukog kvadrata njegova prethodnika i dvostrukog kvadrata njegova sljedbenika. Koji je to broj? Koji je broj njegov sljedbenik?

**8.** Duljine visina jednakokračnog trokuta $ABC$, s osnovicom $\overline{AB}$, su 20 cm i 24 cm. Koliki je opseg trokuta $ABC$ ako je duljina kraka manja od duljine osnovice?

**Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.**

OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE 4. veljače 2010.

8. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Količnici uzastopnih članova su 2, 4, 8. 1 BOD
   Kako je $4 : 2 = 2$ i $8 : 4 = 2$, onda sljedeći količnik treba biti $8 \cdot 2 = 16$,
   a zatim $16 \cdot 2 = 32$. 2 BODA
   Zato u nizu slijedi broj $192 \cdot 16 = 3072$, odnosno $3072 \cdot 32 = 98304$. 1 BOD

   …………………………………………………………………….…… UKUPNO 4 BODA

2. Potrebno je uočiti da je $10\,000^{9999} = (10^4)^{9999}$. 2 BODA
   Iz toga slijedi jednakost $(10^4)^{9999} = 10^{39996}$. 1 BOD
   Dakle, iza znamenke 1 biti će 39 996 nula, pa će broj imati 39 997 znamenaka. 1 BOD
   ……………………………………………………………...………… UKUPNO 4 BODA

3. Površina romba je jednaka polovini umnoška duljina njegovih dijagonala.
   $$p=\frac{\left(\sqrt{2010}+\sqrt{2002}\right)\cdot\left(\sqrt{2010}-\sqrt{2002}\right)}{2}$$ 1 BOD
   $$p=\frac{\left(\sqrt{2010}\right)^2-\left(\sqrt{2002}\right)^2}{2}$$ 1 BOD
   $$p=\frac{2010-2002}{2}=\frac{8}{2}=4$$
   Površina romba iznosi 4 $cm^2$. 2 BODA
   …………………………………………………………………….…… UKUPNO 4 BODA

4. $$\frac{4a^2-4ab}{a^3-ab^2}=\frac{4a\cdot(a-b)}{a\cdot(a^2-b^2)}=$$ 2 BODA
   $$=\frac{4\cdot a\cdot(a-b)}{a\cdot\left(a-b\right)\cdot\left(a+b\right)}=$$ 1 BOD
   $$=\frac{4}{a+b}$$ 1 BOD
   ………………………………………………………………….……… UKUPNO 4 BODA

5. Vrijedi $a^2 - 4a + 2010 = a^2 - 2 \cdot 2a + 2^2 - 2^2 + 2010 = (a-2)^2 + 2006$. 2 BODA
   Za $a = 2$ najmanja vrijednost je 2006. 2 BODA
   …………………………………………………………….………………. UKUPNO 4 BODA

6. Iz $a : b = 8 : 15$ slijedi da je $a = 8x$ i $b = 15x$, $x \in \mathbb{Q}$. 2 BODA
   Primjenom Pitagorina poučka dobiva se $c^2 = (8x)^2 + (15x)^2$, tj. $c^2 = 289x^2$.
   Duljina hipotenuze je $c = 17x$. 3 BODA
   Opseg trokuta je 100 cm pa je $8x + 15x + 17x = 100$.
   Rješavanjem ove jednadžbe dobivamo $x = 2.5$. 2 BODA
   Duljine stranica trokuta su $a = 20$ cm, $b = 37.5$ cm i $c = 42.5$ cm. 3 BODA
   ……………………………………………………………..………. UKUPNO 10 BODOVA

7. Broju $n$ prethodnik je broj $n - 1$,a sljedbenik $n + 1$. 1 BOD

Iz uvjeta zadatka slijedi jednadžba:

$n^2 - 49 = 3(n - 1)^2 - 2(n + 1)^2$ 2 BODA

$n^2 - 49 = 3(n^2 - 2n + 1) - 2(n^2 + 2n + 1)$ 2 BODA

$n^2 - 49 = 3n^2 - 6n + 3 - 2n^2 - 4n - 2$ 1 BOD

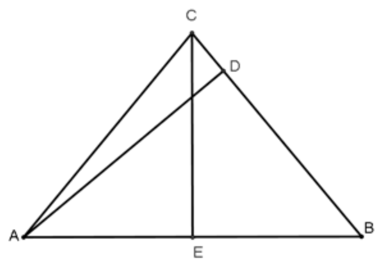
$10n = 50$ 2 BODA

$n = 5$ 1 BOD

Traženi broj je 5, a njegov sljedbenik 6. 1 BOD

……………………………………………………………...……… UKUPNO 10 BODOVA

8.




Neka su $\overline{AD}$ visina na krak $\overline{BC}$ i $\overline{CE}$ visina na osnovicu $\overline{AB}$. 1 BOD

Kako je $|BC| < |AB|$, onda je $|AD| > |CE|$.

To znači da je $|AD| = 24$ cm, a $|CE| = 20$ cm. 1 BOD

Kako je $p = \frac{|AB| \cdot |CE|}{2} = \frac{|BC| \cdot |AD|}{2}$ , onda vrijedi $20|AB| = 24|BC|$

odnosno $|AB| = \frac{6}{5}|BC|$. 2 BODA

Primijenimo li Pitagorin poučak na $\Delta BCE$, slijedi $20^2 + \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 = |BC|^2$, odnosno nakon

sređivanja $|BC| = 25$ cm i $|AB| = 30$ cm. 4 BODA

Na kraju, $o = |AB| + 2\,|BC| = 30 + 2 \cdot 25 = 80$ cm. 2 BODA

……………………………………………………………...……… UKUPNO 10 BODOVA