

## RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

**OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.**

1. Racionalizacijom nazivnika u prva dva člana izraza dobivamo:

$$\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2} \text{ i } \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}. \quad 4 \text{ BODA}$$

Nadalje, vrijedi  $\frac{\sqrt{1.5} - \sqrt{3.5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}.$  3 BODA

Konačno  $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2} = \frac{2\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7}.$  3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Iz uvjeta zadatka slijedi da je  $a + b + (a + b)^2 = 10a + b$ , odnosno  $(a + b)^2 = 9a$ . 2 BODA

Iz prethodne jednakosti slijedi da je  $9a$  potpun kvadrat, odnosno znamenka  $a$  mora biti potpun kvadrat, pa znamenka  $a$  može poprimiti samo tri vrijednosti  $a = 1$ ,  $a = 4$  i  $a = 9$ . 2 BODA

Ako je  $a = 1$ , onda je  $(a + b)^2 = 9$ , tj.  $a + b = 3$ ,  $b = 2$ , pa je broj 12 rješenje. 2 BODA

Ako je  $a = 4$ , onda je  $(a + b)^2 = 36$ , tj.  $a + b = 6$ ,  $b = 2$ , pa je broj 42 rješenje. 2 BODA

Ako je  $a = 9$ , onda je  $(a + b)^2 = 81$ , tj.  $a + b = 9$ ,  $b = 0$ , pa je broj 90 rješenje. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Kvadriramo li jednakost  $x + y = 15$ , dobivamo  $x^2 + 2xy + y^2 = 225$ .

Kako je  $x^2 + y^2 = 117$ , slijedi da je  $2xy = 225 - 117 = 108$ . 3 BODA

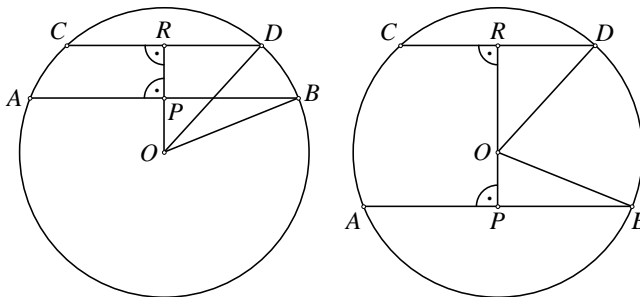
Nadalje, imamo da je  $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 117 - 108 = 9$ , pa je  $x - y = 3$  ili  $x - y = -3$ . 3 BODA

Rješenje sustava  $x + y = 15$ ,  $x - y = 3$  je  $x = 9$  i  $y = 6$ . 2 BODA

Rješenje sustava  $x + y = 15$ ,  $x - y = -3$  je  $x = 6$  i  $y = 9$ . 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Istaknimo dijametar kružnice koji je okomit na tetive  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$ . Neka su  $P$  i  $R$  točke presjeka tog dijametra sa tetivama  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$  redom. Vidimo da imamo dva slučaja u ovisnosti o tome da li se točke  $P$  i  $R$  nalaze s iste ili sa različitih strana središta  $O$  kružnice, što vidimo na sljedećoj slici:



2 BODA

Kako su točke  $P$  i  $R$  polovišta tetiva  $\overline{AB}$  i  $\overline{CD}$  redom, iz Pitagorinog poučka slijedi da je

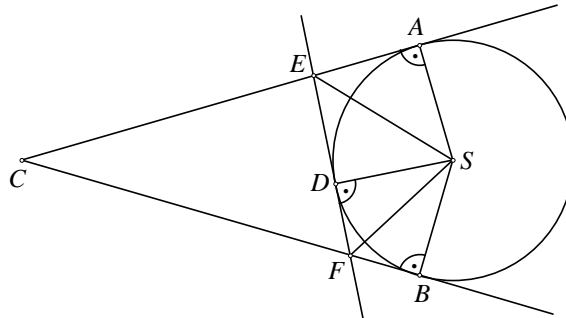
$$|OP| = \sqrt{|OB|^2 - |PB|^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5 \text{ i } |OR| = \sqrt{|OD|^2 - |RD|^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12. \quad 4 \text{ BODA}$$

U prvom slučaju udaljenost tetiva je  $|PR| = |OR| - |OP| = 12 - 5 = 7$  cm. 2 BODA

U drugom slučaju udaljenost tetiva je  $|PR| = |OR| + |OP| = 12 + 5 = 17$  cm. 2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. SKICA



1 BOD

Pokažimo prvo da su trokuti  $SAE$  i  $SED$  sukladni. Sukladnost tih trokuta slijedi iz činjenice da im je stranica  $\overline{SE}$  zajednička, te zbog  $\overline{SA} = \overline{SD}$  i  $\sphericalangle SAE = \sphericalangle SDE$ .

3 BODA

Iz dokazane sukladnosti slijedi da je  $|AE| = |DE|$ .

1 BOD

Analogno se pokazuje da su trokuti  $SDF$  i  $SFB$  sukladni, pa iz te sukladnosti također slijedi da je  $|BF| = |DF|$ .

2 BODA

Konačno, za opseg trokuta  $CFE$  vrijedi

$$\begin{aligned} |CE| + |EF| + |CF| &= |CE| + |ED| + |DF| + |CF| \\ &= |CE| + |AE| + |BF| + |CF| = |AC| + |BC| \\ &= 27 + 27 = 54\text{cm} \end{aligned}$$

3 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA