

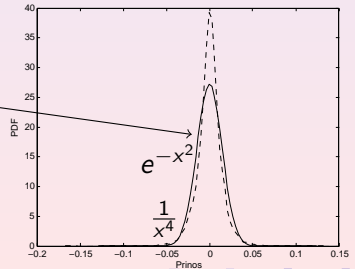
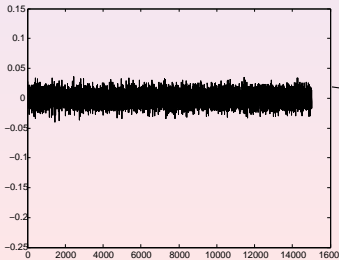
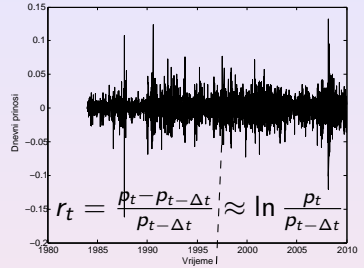
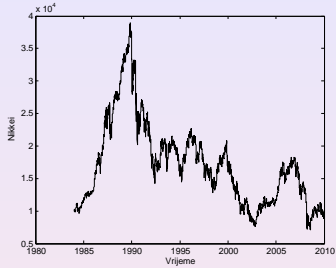
# Velike fluktuacije na financijskim tržištima

Zvonko Kostanjčar, Sveučilište u Zagrebu, FER

svibanj 2011.

## Zarada na dionicama = zarada bez truda? Koji je smisao svega toga?

- 1 Ekonomski rast = Akumulacija kapitala + Inovacije
- 2 Investiranje u dionice
  - 1 donose dividendu
  - 2 zarada na razlici u cijeni
- 3 Dinamika cijene - dominiraju veliki skokovi
- 4 Koji su izvori tih fluktuacija
  - 1 fundamentalni faktori: izvještaji, makroekonomski faktori, ostale vijesti
  - 2 postoji li još nešto?



## Primjer (Black-Scholes-Mertonov model, Nobelova nagrada 1997.)

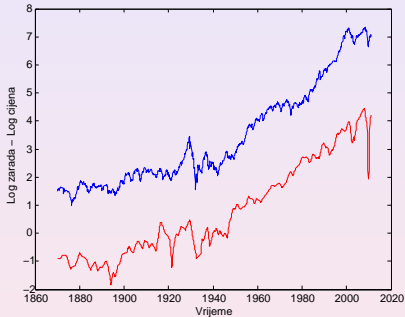
- a) *Model cijene dionice:*

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

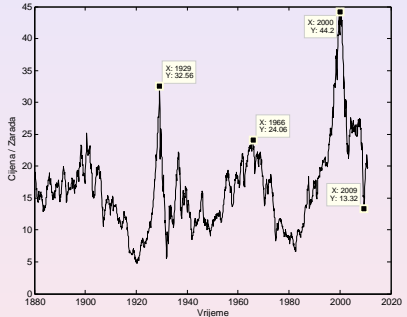
- b) *BSM parcijalna diferencijalna jednadžba:*

$$\frac{\partial c(t,x)}{\partial t} + r x \frac{\partial c(t,x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 c(t,x)}{\partial x^2} = r c(t,x), \quad \forall t \in [0, T),$$

$$c(T, x) = (x - K)^+.$$



(a) Logaritam S&P 500 indeksa i logaritam odgovarajućih zarada



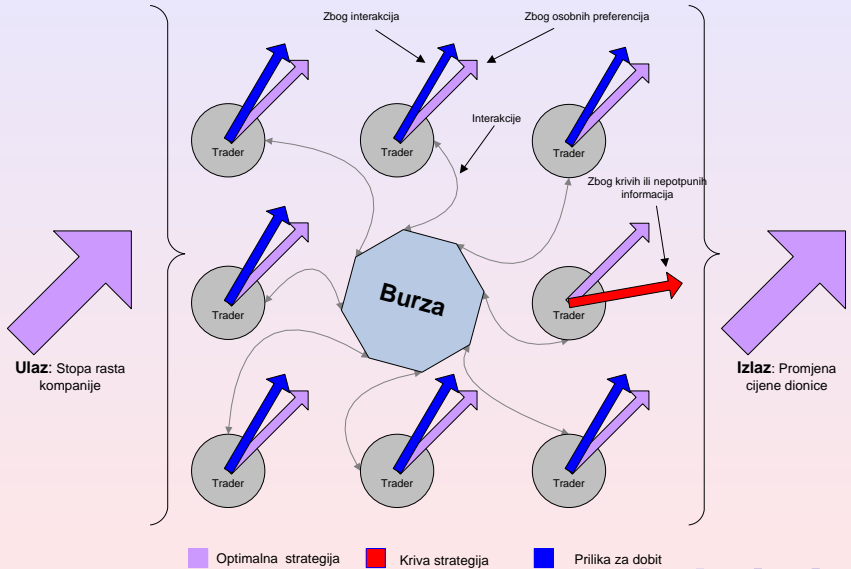
(b) P/E za S&P 500

## Kako funkcioniraju tržišta kapitala?

- 1 Koja je uloga primarnih tržišta?
  - 1 kompanije preko njih dolaze do kapitala
- 2 Koja je uloga sekundarnih tržišta?
  - 1 likvidnost
  - 2 diverzifikacija rizika
  - 3 **kontroler**
- 3 Što kada bi svi investitori znali "pravu" vrijednost kompanije, imali sve informacije?
  - 1 ponašali bi se jednako
  - 2 nema zarade od **trgovine** dionicama
- 4 Što kada u tom "idealnom" slučaju, neki investitor povlači krivi potez?
  - 1 stvara priliku za zaradu od trgovanja ostalim, "idealnim" investitorima
  - 2 ostali svojim djelovanjem **kompensiraju** djelovanje "lošeg" investitora

## Idealno ponašanje — samo u očekivanju

- 1 U stvarnom svijetu investitori
  - 1 imaju različite strategije ulaganja
  - 2 ne ponašaju se uvijek racionalno
  - 3 ne posjeduju sve informacije
- 2 Unatoč tome, u prosjeku dobro procjenjuju "realnu" vrijednost kompanija
- 3 Umjesto različitih determinističkih investitora imamo jednake stohastičke investitore
- 4 Ponašanje investitora u očekivanju
  - 1 dobro procjenjuju "realnu" vrijednost kompanije
  - 2 koriste prilike za zaradu na tržištu



- a Tržište se sastoji od:
  - 1 jedne kompanije s  $M$  izdanih dionica
  - 2 jedne banke
  - 3  $N$  investitora (agenata)
- b Svi agenti znaju cijenu dionice u trenutku  $t = 0$  i neka ona iznosi  $p_0$
- c Svaki agent u trenutku  $t = \Delta t$  može kupiti ili prodati  $\{0, \dots, M\}$  dionica,  
 $\omega_i \in \{-M, \dots, 0, \dots, M\}$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$
- d Razlika ponude i potražnje određuje prinos,  $r = \frac{1}{\lambda} \frac{\sum_{i=1}^N \omega_i}{N}$ ,  
prema tome  $p_{\Delta t} = p_0 e^r \approx p_0(1 + r)$

Cijena  $p_{\Delta t}$  je **slučajna varijabla** i ovisi o potezima svih agenata.

- a Skup elementarnih događaja je  $\Omega = \{-M, \dots, M\}^N$
- b Strategija investitora  $i$  je slučajna varijabla  $\delta_i$  s vrijednostima u skupu  $\{-M, \dots, M\}$
- c Prinos je slučajna varijabla  $r_N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $r_N = \frac{1}{\lambda} \frac{\sum_{i=1}^N \omega_i}{N}$
- d **Pretpostavka<sub>1</sub>**: Na temelju svih raspoloživih informacija investitori procjenjuju očekivanu stopu rasta kompanije u intervalnoj formi  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$
- e **Pretpostavka<sub>2</sub> (STRAH)**: Investitori minimiziraju rizik,  $E(\delta_i) = \lambda(a - \varepsilon)$
- f **Pretpostavka<sub>3</sub> (POHLEPA)**: Investitori minimiziraju moguću propuštenu dobit,  $E(\delta_i) = \lambda(a + \varepsilon)$

---

**ZADATAK:** Odrediti  $(\Omega, \sigma(\Omega), \mu)$  i  $(\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}}, \mu_r)$

## Model (Funkcija gubitka)

*Funkcija gubitka  $i$ -tog agenta je:*

- a  $L_1(\omega_i) = c_1 (\omega_i - \lambda(a - \varepsilon))^2 + c_2, \quad i \in \{1, \dots, N\},$
- b  $L_2(\omega_1, \dots, \omega_N) = c_3 \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \omega_j - \lambda(a + \varepsilon) \right)^2 + c_4.$

## Model (Energija financijskog tržišta)

**Energija** *financijskog tržišta je slučajna varijabla  $U_N : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$*

$$U_N(\omega_1, \dots, \omega_N) = \sum_{i=1}^N \ln L_1(\omega_i) + \ln L_2(\omega_1, \dots, \omega_N).$$

## Teorem (Varijacijski princip [Ruelle])

Za energiju  $U$ , translacijski invarijantna vjerojatnosna mjera  $\mu$  koja zadovoljava  $P(U) = \max_{\mu} [h(\mu) + E_{\mu}(U)]$  je ravnotežna vjerojatnosna mjera.

## Model (Ravnotežno stanje tržišta)

Ravnotežno stanje tržišta određeno je sa

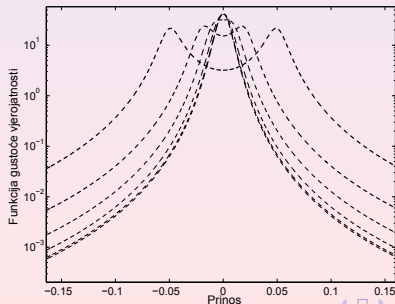
$$\mu_N(\omega_1, \dots, \omega_N) = \frac{\exp(-U_N)}{Z_N},$$

gdje je  $Z_N = \sum_{\{\omega_1, \dots, \omega_N\} \in \Omega_N} \exp(-U_N)$  odgovarajuća particijska funkcija.

## Model (Ravnotežna mjera prinosa)

*Kada broj agenata i broj dionica kompanije teže prema beskonačno tada ravnotežna mjera prinosa  $r_N$  konvergira prema,*

$$r_N = \frac{1}{\lambda} \frac{\sum_{i=1}^N \omega_i}{N} \xrightarrow{\mathcal{D}} C \frac{1}{(x - (a + \varepsilon))^2 + \sigma^2} \frac{1}{(x - (a - \varepsilon))^2 + \sigma^2}.$$

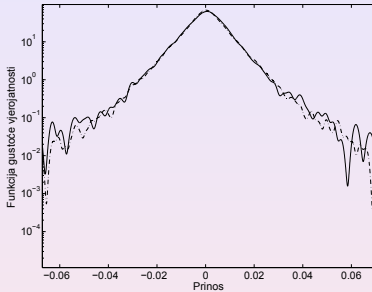


- a Parametri  $a$  i  $\sigma$  su približno vremenski nepromjenjivi
- b Nesigurnost  $\varepsilon = |y - 0|$  prirodno je modelirati s  $\frac{y_t - y_{t-\Delta t}}{y_{t-\Delta t}} = -\alpha y_{t-\Delta t}^2$ , gdje je  $\alpha$  konstanta koja definira brzinu povratka u ekvilibrij.

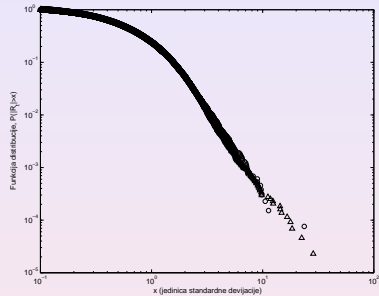
### Definicija (Predloženi model)

Prinos dionica je slučajni proces  $\{r_t, t \in T\}$  sa svojstvima:

- a  $r_0 = a, y_0 = 0,$
- b  $y_t = y_{t-\Delta t} - \alpha y_{t-\Delta t}^3 + \frac{1}{\alpha}(r_{t-\Delta t} - a),$
- c  $f(x_t | y_t) = C(y_t) \frac{1}{1 + \frac{(x_t - a)^2}{y_t^2 + \frac{\sigma^2}{2}} + \frac{((x_t - a)^2 - y_t^2)^2}{2\sigma^2 y_t^2 + \sigma^4}}.$



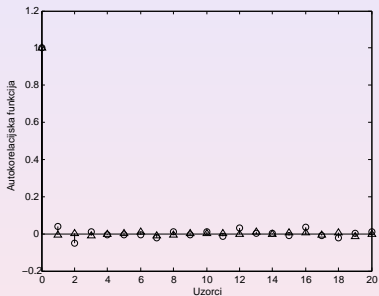
(a) Funkcije gustoće vjerojatnosti



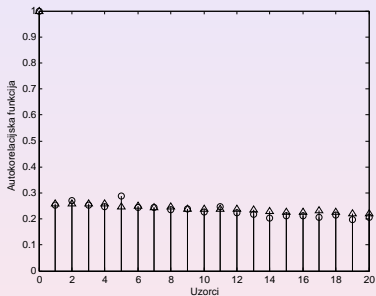
(b) Rep distribucije

Proveden je dodatno **Mann–Whitney–Wilcoxon** (MWW) test. Vrijednost statistike za dvije vremenske serije  $U = 1.76$ , a granica za 95% sigurnost iznosi 1.96.

Koristeći regresiju u log-log kordinatama  $P(|R_{it}| > x) \sim x^{-\zeta_{r_i}}$  s  $\zeta_{r_1} \approx 3.05 \pm 0.06$  i  $\zeta_{r_2} \approx 3.01 \pm 0.03$ .



(a) Autokorelacijska funkcija  
 prinosa



(b) Autokorelacijska funkcija  
 apsolutnih prinosa

## Možda je ovako nekako:

- 1 Velike fluktuacije nastaju iz same strukture tržišta
  - 1 generira ih sukob straha i pohlepe
  - 2 investitore ne pokreće stanje, već količina zarade
- 2 Vijesti mogu, ali i ne moraju biti pokretači velikih fluktuacija
- 3 Kod velikih nesigurnosti na tržištu — male fluktuacije postaju manje vjerojatne