

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija

30. ožujka 2009.

Zadatak A-1.1.

Oredi sve trojke uzastopnih neparnih prirodnih brojeva čiji je zbroj kvadrata jednak nekom četveroznamenkastom broju kojem su sve znamenke jednake.

Rješenje.

Tražimo prirodan broj k i znamenku $x \in \{1, 2, \dots, 9\}$ takve da vrijedi:

$$\begin{aligned}(2k - 1)^2 + (2k + 1)^2 + (2k + 3)^2 &= \overline{xxxx} \\ 12k^2 + 12k + 11 &= 1111x \\ 12(k^2 + k) + 11 &= 12 \cdot 92x + 7x.\end{aligned}$$

Slijedi da je $7x - 11$ djeljivo s 12.

Stoga x mora biti neparan.

Za $x \in \{1, 3, 7, 9\}$, $7x - 11$ nije djeljivo s 12.

Za $x = 5$ imamo $7 \cdot 5 - 11 = 24 = 2 \cdot 12$. Tada je:

$$\begin{aligned}12k^2 + 12k + 11 &= 5555 \\ 12k^2 + 12k &= 5544 / : 12 \\ k^2 + k = k(k + 1) &= 462 = 21 \cdot 22.\end{aligned}$$

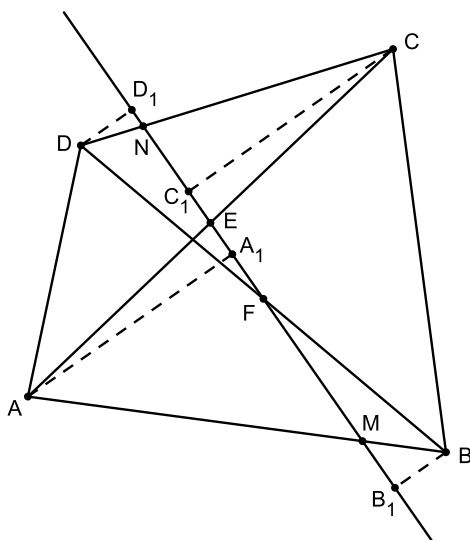
Dakle, $k = 21$, a traženi brojevi su 41, 43 i 45.

Zadatak A-1.2.

Zadan je konveksan četverokut $ABCD$ koji nije paralelogram. Neka pravac koji prolazi kroz polovišta dijagonala četverokuta siječe stranice \overline{AB} i \overline{CD} redom u točkama M i N . Dokaži da trokuti ABN i CDM imaju jednake površine.

Rješenje.

Neka su E i F redom polovišta dijagonala \overline{AC} i \overline{BD} . Nadalje, neka su A_1, B_1, C_1, D_1 redom nožišta okomica iz vrhova A, B, C, D na pravac EF .



Zbog $\sphericalangle AEA_1 = \sphericalangle CEC_1$ (vršni kutevi) i $|AE| = |EC|$, vrijedi da su pravokutni trokuti AA_1E i CC_1E sukladni. Zbog toga je $|AA_1| = |CC_1|$.

Analogno, trokuti BB_1F i DD_1F su sukladni i vrijedi $|BB_1| = |DD_1|$.

Vrijedi

$$\begin{aligned} P(ABN) &= P(AMN) + P(MBN) \\ &= \frac{|MN| \cdot |AA_1|}{2} + \frac{|MN| \cdot |BB_1|}{2} \\ &= \frac{1}{2}|MN|(|AA_1| + |BB_1|) \end{aligned}$$

i slično:

$$\begin{aligned} P(CDM) &= P(CMN) + P(MDN) \\ &= \frac{|MN| \cdot |CC_1|}{2} + \frac{|MN| \cdot |DD_1|}{2} \\ &= \frac{1}{2}|MN|(|CC_1| + |DD_1|). \end{aligned}$$

Dakle,

$$P(ABN) = \frac{1}{2}|MN|(|AA_1| + |BB_1|) = \frac{1}{2}|MN|(|CC_1| + |DD_1|) = P(CDM).$$

Zadatak A-1.3.

Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi, takvi da je $xyz = 1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3 + z^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3 + x^3}{z^2 + zx + x^2} \geq 2.$$

Rješenje.

Najprije uočimo da

$$\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3(x^2 - xy + y^2) \geq x^2 + xy + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x - y)^2 \geq 0,$$

pa je
$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} \cdot (x + y) \geq \frac{1}{3}(x + y).$$

Zato vrijedi

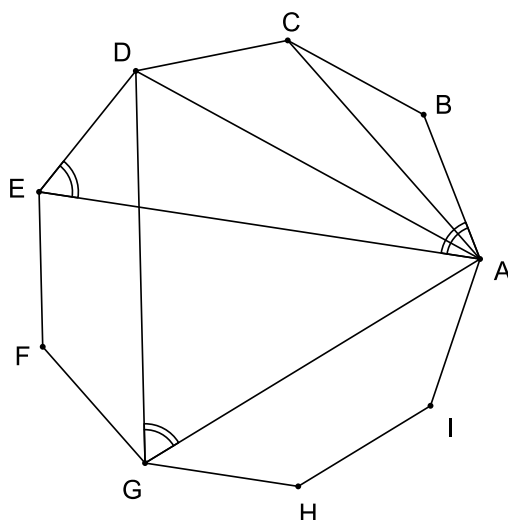
$$\begin{aligned} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3 + z^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3 + x^3}{z^2 + zx + x^2} \\ \geq \frac{1}{3}(x + y) + \frac{1}{3}(y + z) + \frac{1}{3}(z + x) = \frac{2}{3}(x + y + z) \end{aligned}$$

Konačno, zbog nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine i zbog uvjeta zadatka vrijedi $\frac{2}{3}(x + y + z) \geq 2\sqrt[3]{xyz} = 2\sqrt[3]{1} = 2$, čime je nejednakost dokazana.

Zadatak A-1.4.

Dan je pravilni deveterokut sa stranicom duljine a . Kolika je razlika duljina njegove najdulje i najkraće dijagonale?

Rješenje.



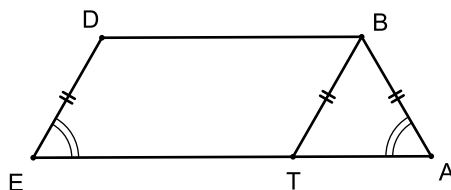
Bez smanjenja općenitosti, gledamo dužine iz vrha A . Duljina najdulje dijagonale je $|AE|$, a najkraće $|AC|$ i traži se $|AE| - |AC|$.

Primijetimo da su trokuti ADG i BEH jednakostranični. Zato, i zbog jednakosti kuteva nad istim lukom deveterokutu opisane kružnice, vrijedi:

$$\sphericalangle AED = \sphericalangle AGD = 60^\circ \quad \text{i} \quad \sphericalangle EAB = \sphericalangle EHB = 60^\circ.$$

Prema tome, četverokut $ABDE$ je jednakokračan trapez.

Povucimo kroz vrh B pravac paralelan s \overline{DE} . Neka je T njegovo sjecište s \overline{AE} .



Četverokut $TEDB$ je paralelogram i vrijedi

$$|AE| - |AC| = |AE| - |BD| = |AE| - |TE| = |AT|.$$

Primijetimo da je trokut ABT jednakostraničan pa vrijedi:

$$|AE| - |AC| = |AT| = |AB| = a.$$

Zadatak A-1.5.

Dva igrača, A i B igraju sljedeću igru: A i B zapisuju naizmjenično po jednu znamenku sve dok ne napišu šestoznamenkasti broj, pri čemu se niti jedna znamenka ne smije ponoviti. Prva znamenka mora biti različita od 0. Igrač A igra prvi, a znamenke se pišu redom s lijeva na desno. Igrač A pobjeđuje ako je napisani šestoznamenkasti broj djeljiv s 2, 3 ili 5, a u suprotnom pobjeđuje igrač B . Dokaži da igrač A ima strategiju za pobjedu, tj. može pobijediti neovisno o igri igrača B .

Rješenje.

Neka su a_1, a_2, a_3 znamenke koje izabire A , a b_1, b_2, b_3 znamenke koje izabire B . Dobiveni broj je $x = a_1b_1a_2b_2a_3b_3$.

Neka je $M = \{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$ i $N = \{1, 3, 7, 9\}$. Ako je $b_3 \in M$, broj x je djeljiv s 2 ili 5. Stoga B ne smije svoju zadnju znamenku odabrati iz skupa M .

Zato A bira svoje prve dvije znamenke iz N prisiljavajući time igrača B da svoje prve dvije znamenke bira iz M (u suprotnom bi A mogao potrošiti zadnju znamenku iz N prije zadnjeg poteza igrača B , pa bi bilo $b_3 \in M$ i A pobjeđuje).

Igrač A mora postići da broj x bude djeljiv s 3. Neka je $a_1 = 3, a_2 = 9$. Tada je $b_3 \equiv 1 \pmod{3}$ jer iz skupa N preostaju znamenke 1 i 7.

Broj x bit će djeljiv s 3 ako je $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3$ djeljivo s 3. Ovisno o odabiru b_1 i b_2 , imamo 3 mogućnosti:

(1) $b_1 + b_2 \equiv 0 \pmod{3}$. Tada je $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 \equiv a_3 + 1 \pmod{3}$.

Igrač A može odabrati za a_3 jednu od znamenaka 2, 5 ili 8 (barem jedna od njih je još neiskorištena).

(2) $b_1 + b_2 \equiv 1 \pmod{3}$. Tada je $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 \equiv a_3 + 2 \pmod{3}$.

Sada A može odabrati $a_3 = 1$.

(3) $b_1 + b_2 \equiv 2 \pmod{3}$. Tada je $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 \equiv a_3 \pmod{3}$.

U ovom slučaju A bira $a_3 = 0$ ili $a_3 = 6$. Barem jedan on njih je na raspolaganju, jer da je B odabrao oba, bilo bi $b_1 + b_2 \equiv 0 \pmod{3}$.

U svakom slučaju suma znamenaka bit će djeljiva s 3, pa će i x biti djeljiv s 3, a igrač A pobjednik.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija

30. ožujka 2009.

Zadatak A-2.1.

Neka su a i b cijeli brojevi takvi da je $a^2 + 2b$ kvadrat cijelog broja. Dokaži da se broj $a^2 + b$ može prikazati kao zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva.

Rješenje.

Prema uvjetu zadatka je

$$a^2 + 2b = m^2, \quad (1)$$

za neki $m \in \mathbb{Z}$. Odatle je $b = \frac{m^2 - a^2}{2}$ pa imamo

$$a^2 + b = a^2 + \frac{m^2 - a^2}{2} = \frac{m^2 + a^2}{2}.$$

No, vrijedi

$$\frac{m^2 + a^2}{2} = \frac{(m+a)^2 + (m-a)^2}{4} = \left(\frac{m+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{m-a}{2}\right)^2.$$

Još treba provjeriti da su brojevi $\frac{m+a}{2}$ i $\frac{m-a}{2}$ cijeli.

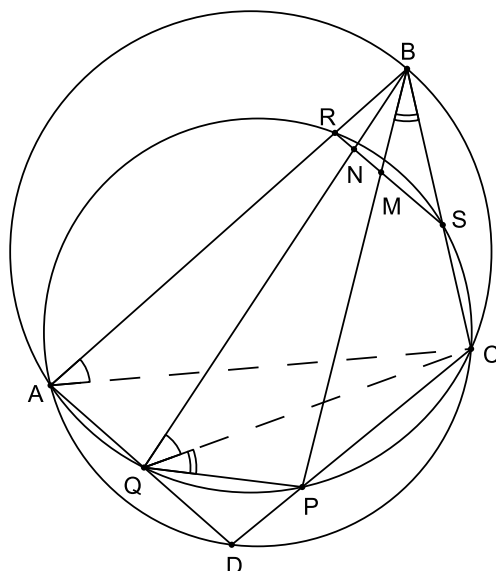
Zaista, iz relacije (1) slijedi da su brojevi m i a iste parnosti.

Zbog toga su $m+a$ i $m-a$ parni brojevi, pa su $\frac{m+a}{2}$ i $\frac{m-a}{2}$ cijeli brojevi.

Zadatak A-2.2.

Dan je četverokut $ABCD$. Opisana kružnica trokuta ABC siječe stranice \overline{CD} i \overline{DA} redom u točkama P i Q , a opisana kružnica trokuta CDA stranice \overline{AB} i \overline{BC} redom u točkama R i S . Pravci BP i BQ sijeku pravac RS redom u točkama M i N . Dokaži da točke M , N , P i Q leže na istoj kružnici.

Rješenje.



Vrijede jednakosti $\sphericalangle BQC = \sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle CQP = \sphericalangle CBP$ (jednakost obodnih kuteva).

Četverokut $ACSR$ je tetivan pa je $\sphericalangle RSC + \sphericalangle RAC = 180^\circ$, a odatle slijedi $\sphericalangle BSR = 180^\circ - \sphericalangle RSC = \sphericalangle RAC = \sphericalangle BAC = \sphericalangle BQC$.

Dalje imamo:

$$\begin{aligned} 180^\circ - \sphericalangle PMN &= 180^\circ - \sphericalangle BMS = \sphericalangle SBM + \sphericalangle BSM \\ &= \sphericalangle CBP + \sphericalangle BSR = \sphericalangle CQP + \sphericalangle BQC = \sphericalangle BQP \\ &= \sphericalangle NQP. \end{aligned}$$

To znači da je četverokut $QPMN$ tetivan, odnosno da točke M , N , P i Q leže na istoj kružnici.

Zadatak A-2.3.

Nađi sve parove kompleksnih brojeva (w, z) , $w \neq z$, koji zadovoljavaju sustav jednažbi

$$\begin{aligned}w^5 + w &= z^5 + z, \\w^5 + w^2 &= z^5 + z^2.\end{aligned}$$

Rješenje.

Oduzimanjem zadanih jednažbi dobivamo jednažbu

$$w - w^2 = z - z^2$$

koja je ekvivalentna jednažbi

$$(w - z)(w + z - 1) = 0.$$

Budući da je $w - z \neq 0$, slijedi

$$w + z = 1. \tag{1}$$

Kvadriranjem te jednakosti dobivamo

$$w^2 + z^2 = 1 - 2wz, \tag{2}$$

a ponovnim kvadriranjem

$$w^4 + z^4 = 1 - 4wz + 2(wz)^2. \tag{3}$$

Prva jednažba danog sustava ekvivalentna je jednažbi

$$\frac{w^5 - z^5}{w - z} = -1.$$

Ona se može zapisati u obliku

$$\begin{aligned}\frac{(w - z)(w^4 + w^3z + w^2z^2 + wz^3 + z^4)}{w - z} &= -1, \\w^4 + w^3z + w^2z^2 + wz^3 + z^4 + 1 &= 0, \\w^4 + z^4 + wz(w^2 + z^2 + wz) + 1 &= 0.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem (2) i (3) i sređivanjem dobivamo jednažbu

$$(wz)^2 - 3wz + 2 = 0,$$

rješavanjem koje slijedi da je $wz = 1$ ili $wz = 2$.

Uvrštavanjem $z = \frac{1}{w}$ i $z = \frac{2}{w}$ u (1) dobivamo kvadratne jednažbe $w^2 - w + 1 = 0$ i $w^2 - w + 2 = 0$ odakle konačno dobivamo četiri rješenja

$$(w, z) = \left(\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 \mp \sqrt{3}i}{2} \right) \quad \text{i} \quad (w, z) = \left(\frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}, \frac{1 \mp \sqrt{7}i}{2} \right).$$

Zadatak A-2.4.

Oredi najveću vrijednost realne konstante λ takve da za sve pozitivne realne brojeve u, v, w za koje je $u\sqrt{vw} + v\sqrt{wu} + w\sqrt{uv} \geq 1$ vrijedi nejednakost $u + v + w \geq \lambda$.

Rješenje.

Tvrdimo da je najveća moguća vrijednost konstante λ jednaka $\sqrt{3}$.

Naime, lako je vidjeti da za $u = v = w = \frac{\sqrt{3}}{3}$ vrijedi $u\sqrt{vw} + v\sqrt{wu} + w\sqrt{uv} = 1$ i $u + v + w = \sqrt{3}$. Dakle, najveća vrijednost konstante λ je manja ili jednaka $\sqrt{3}$.

Pokazat ćemo da za $u, v, w > 0$ za koje je $u\sqrt{vw} + v\sqrt{wu} + w\sqrt{uv} \geq 1$, vrijedi $u + v + w \geq \sqrt{3}$.

Prvi način. Iz danih uvjeta i nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine imamo

$$u \cdot \frac{v+w}{2} + v \cdot \frac{w+u}{2} + w \cdot \frac{u+v}{2} \geq u\sqrt{vw} + v\sqrt{wu} + w\sqrt{uv} \geq 1,$$

odnosno

$$uv + vw + wu \geq 1.$$

Kako vrijedi

$$\begin{aligned}(u-v)^2 + (v-w)^2 + (w-u)^2 &\geq 0, \\ u^2 + v^2 + w^2 &\geq uv + vw + wu \geq 1,\end{aligned}$$

slijedi

$$(u+v+w)^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + vw + wu) \geq 3,$$

odnosno $u + v + w \geq \sqrt{3}$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $u = v = w = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Drugi način. Primjenom najprije aritmetičko-geometrijske, a zatim i Cauchyjeve nejednakosti imamo

$$\begin{aligned}\frac{(u+v+w)^4}{9} &= \left(\frac{u+v+w}{3}\right)^3 \cdot 3(u+v+w) \geq 3uvw(u+v+w) = \\ &= (uvw + vwu + wuv)(u+v+w) \geq (u\sqrt{vw} + v\sqrt{wu} + w\sqrt{uv})^2 \geq 1.\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi $u + v + w \geq \sqrt{3}$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $u = v = w = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Treći način. Stavimo $x = \sqrt{uv}$, $y = \sqrt{vw}$, $z = \sqrt{wu}$. Tada zbog zadanog uvjeta vrijedi

$$xy + yz + zx = v\sqrt{wu} + w\sqrt{uv} + u\sqrt{vw} \geq 1.$$

Primijetimo da je $u = \frac{zx}{y}$, $v = \frac{xy}{z}$, $w = \frac{yz}{x}$. Primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine imamo

$$2(u+v+w) = \left(\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\right) + \left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x}\right) + \left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}\right) \geq 2x + 2y + 2z,$$

odnosno $u + v + w \geq x + y + z$. Kao u prvom rješenju, dobivamo

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \geq 3(xy + yz + zx) \geq 3,$$

te konačno

$$(u + v + w)^2 \geq (x + y + z)^2 \geq 3,$$

odnosno $u + v + w \geq \sqrt{3}$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $u = v = w = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Zadatak A-2.5.

U svako polje tablice $m \times n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) upisano je slovo A ili B . Pritom nikoja dva susjedna polja (sa zajedničkom stranicom) ne sadrže isto slovo. U jednom koraku biraju se dva susjedna polja, i oba slova na tim poljima zamijene se novim slovima po sljedećem pravilu:

- umjesto slova A upisuje se slovo B ,
- umjesto slova B upisuje se slovo C ,
- umjesto slova C upisuje se slovo A .

Za koje m i n nakon konačno mnogo koraka možemo postići da u svim poljima u kojima je na početku bilo napisano slovo A sada piše slovo B , a u svim poljima u kojima je na početku bilo napisano slovo B sada piše slovo A ?

Rješenje.

Neka se u tablici $m \times n$ u konačno mnogo koraka mogu promijeniti slova u svim poljima na traženi način. Označimo broj polja u kojima se u početku nalazilo slovo A s a , a broj polja u kojima je u početku bilo upisano slovo B s b .

Kako se u i -tom polju u kojem je na početku bilo slovo A na kraju nalazi slovo B , na njemu je provedeno $3s_i + 1$ opisanih operacija (za neko $s_i \in \mathbb{N}_0$). Slično, na i -tom polju u kojem je u početku bilo slovo B provedeno je $3t_i + 2$ takvih operacija (za neko $t_i \in \mathbb{N}_0$).

Budući da se u svakom paru susjednih polja nalazi jedno polje na kojem je na početku pisalo A i jedno na kojem je pisalo B , vrijedi jednakost $\sum_{i=1}^a (3s_i + 1) = \sum_{i=1}^b (3t_i + 2)$.

Odatle je $a - 2b = 3 \sum_{i=1}^b t_i - 3 \sum_{i=1}^a s_i$, pa vrijedi $3 \mid (a - 2b)$, tj. $3 \mid (a + b)$ odnosno $3 \mid mn$, te zaključujemo da barem jedan od brojeva m i n mora biti djeljiv s 3.

S druge strane, ako je neki od m i n djeljiv s 3, tablica $m \times n$ se može podijeliti na dijelove 1×3 (ili 3×1). U njima se mogu provesti tražene operacije, npr. ovako:

$$\underline{ABA} \rightarrow \underline{BCA} \rightarrow \underline{BAB},$$

$$\underline{BAB} \rightarrow \underline{CBB} \rightarrow \underline{CCC} \rightarrow \underline{AAC} \rightarrow \underline{ABA}.$$

Stoga se opisana zamjena slova može provesti i u tablici $m \times n$ koja je sastavljena od dijelova dimenzija 1×3 .

Dakle, nužan i dovoljan uvjet da se ispuni zahtjev iz zadatka u tablici $m \times n$ jest da je barem jedan od brojeva m i n djeljiv s 3.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija

30. ožujka 2009.

Zadatak A-3.1.

Odredi sve prirodne brojeve m i n za koje je $6^m + 2^n + 2$ potpun kvadrat.

Rješenje.

Broj $6^m + 2^n + 2 = 2(3^m \cdot 2^{m-1} + 2^{n-1} + 1)$ je paran. Da bi bio potpun kvadrat, izraz u zagradi mora biti paran, odnosno točno jedan od brojeva 2^{m-1} , 2^{n-1} mora biti neparan. To znači da je jedan od brojeva m i n jednak 1, a drugi veći od 1.

Prvi slučaj. $m = 1$.

Tražimo prirodne brojeve n za koje je $6^1 + 2^n + 2 = 2^n + 8$ potpun kvadrat.

Kako je $2^n + 8 = 4(2^{n-2} + 2)$, zaključujemo da i $2^{n-2} + 2$ mora biti potpun kvadrat.

Ako je $n \geq 4$, onda je $2^{n-2} + 2$ paran broj koji nije djeljiv s 4, pa nije potpun kvadrat.

Preostaje ispitati slučajeve $n = 2, 3$. Samo za $n = 3$ taj je broj potpun kvadrat.

Drugi slučaj. $n = 1$.

Kako broj $6^m + 2^1 + 2 \equiv (-1)^m + 4 \pmod{7}$ daje ostatak 3 ili 5 pri dijeljenju sa 7, on ne može biti potpun kvadrat, jer potpun kvadrat pri dijeljenju sa 7 daje ostatak 0, 1, 2 ili 4.

Dakle, jedino rješenje je $(m, n) = (1, 3)$.

Drugi način. Drugi slučaj može se riješiti i promatrajući ostatke modulo 4:

Pretpostavimo da postoji $x \in \mathbb{N}$ takav da je $6^m + 4 = x^2$. Tada je $6^m = (x - 2)(x + 2)$.

Brojevi $x - 2$ i $x + 2$ se razlikuju za 4, pa daju isti ostatak pri dijeljenju s 4. Njihov umnožak je $2^m \cdot 3^m$. Njihova najveća zajednička mjera $M(x - 2, x + 2) = M(x - 2, 4)$ može biti samo 1, 2 ili 4.

Ako je mjera jednaka 1, dobivamo $x - 2 = 2^m$, $x + 2 = 3^m$. Ovo je nemoguće jer je 2^m paran, a 3^m neparan broj.

Ako je mjera jednaka 2, oba broja moraju dati ostatak 2 pri dijeljenju s 4. To znači da je $m = 2$, no tada $x^2 = 6^2 + 4 = 40$ nije potpun kvadrat.

Ako je mjera jednaka 4, dobivamo $x - 2 = 2^{m-2}$, $x + 2 = 4 \cdot 3^m$. No, očito je $2^{m-2} + 4 < 3^m$, pa ni u ovom slučaju nema rješenja.

Zadatak A-3.2.

Neka je ABC trokut u kojem vrijedi $|AC| > |BC|$. Izrazi površinu trokuta određenog stranicom \overline{AB} , simetralom stranice \overline{AB} i simetralom kuta $\sphericalangle ACB$ pomoću duljina stranica trokuta ABC .

Rješenje.

Označimo duljine stranica i mjere kuteva trokuta ABC standardno $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$.

Neka je točka P polovište stranice \overline{AB} , točka D sjecište navedenih simetrala, a točka E sjecište simetrale $\sphericalangle ACB$ i stranice \overline{AB} . Potrebno je pomoću a, b i c izraziti površinu trokuta DEP . Budući da je DEP pravokutan trokut s katetama \overline{PD} i \overline{PE} vrijedi

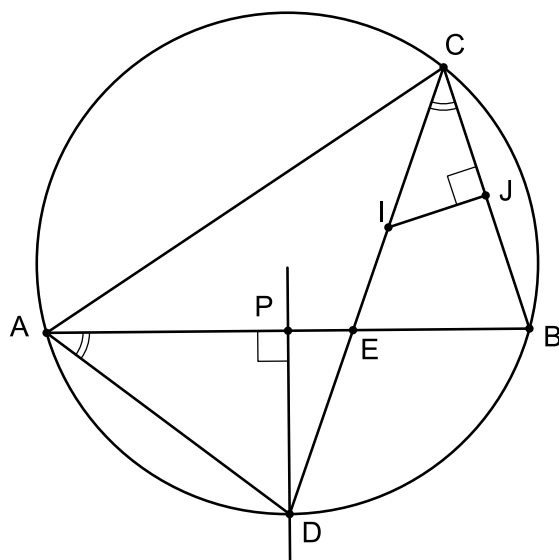
$$P(DEP) = \frac{|PD| \cdot |PE|}{2}. \quad (1)$$

Prema poučku o simetrali kuta vrijedi $\frac{a}{b} = \frac{|BE|}{|AE|}$, pa zbog $|AE| + |BE| = c$

dobivamo $|BE| = \frac{ca}{a+b}$.

Kako je P polovište stranice \overline{AB} slijedi

$$|PE| = |PB| - |EB| = \frac{c}{2} - \frac{ca}{a+b} = \frac{c(b-a)}{2(a+b)}. \quad (2)$$



Primijetimo da i simetrala kuta $\sphericalangle ACB$ i simetrala stranice \overline{AB} raspodjeljuju luk \widehat{AB} opisane kružnice trokutu ABC iz čega zaključujemo da je upravo točka D polovište tog luka, to jest D leži na kružnici opisanoj trokutu ABC . Prema poučku o obodnom kutu primijenjenom na kuteve nad tetivom \overline{DB} slijedi

$$\sphericalangle DAP = \sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB = \frac{\gamma}{2}.$$

Sada iz pravokutnog trokuta PAD zaključujemo da je

$$|PD| = |AP| \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{c}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}. \quad (3)$$

Preostaje izraziti $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ pomoću a , b , c .

Neka je $s = \frac{a+b+c}{2}$ poluopseg, I središte upisane kružnice trokutu ABC te J projekcija točke I na stranicu \overline{BC} . Tada je $|CJ| = \frac{a+b-c}{2} = s-c$, pa iz trokuta CIJ zaključujemo da je $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c}$.

Izjednačavanjem izraza za površinu trokuta

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = P(ABC) = r \cdot s$$

slijedi

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

pa je

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}. \quad (4)$$

Alternativno,

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos \gamma}{1+\cos \gamma}} = \sqrt{\frac{1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}} = \sqrt{\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab+a^2+b^2-c^2}} = \sqrt{\frac{c^2-(a-b)^2}{(a+b)^2-c^2}}.$$

Sada iz (1), (2), (3) i (4) slijedi

$$\begin{aligned} P(DEP) &= \frac{1}{2} \cdot |PE| \cdot |PD| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{c(b-a)}{2(a+b)} \cdot \frac{c}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{c(b-a)}{2(a+b)} \cdot \frac{c}{2} \cdot \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \\ &= \frac{c^2(b-a)}{8(a+b)} \sqrt{\frac{(b+c-a)(a+c-b)}{(a+b+c)(a+b-c)}}. \end{aligned}$$

Zadatak A-3.3.

Neka je ABC trokut sa stranicama duljina a , b i c i neka je P točka u njegovoj unutrašnjosti. Neka pravac AP ponovno siječe kružnicu opisanu trokutu BCP u točki A' i neka su B' i C' točke definirane analogno. Dokaži da za opseg O šesterokuta $AB'CA'BC'$ vrijedi

$$O \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}).$$

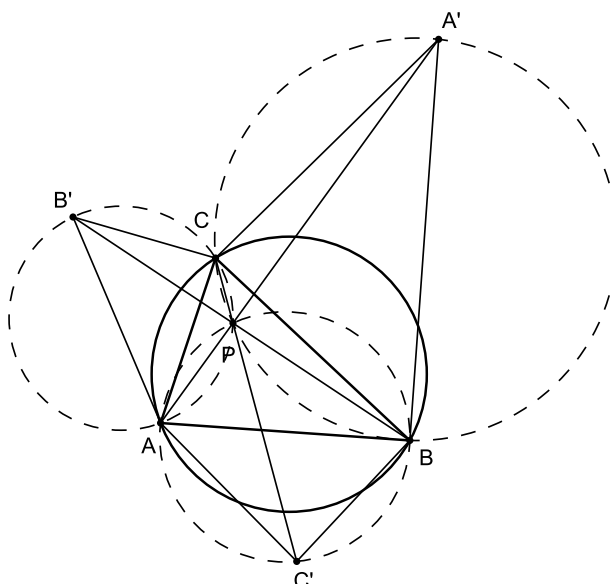
Rješenje.

Prvi način. Vrijedi

$$\sphericalangle BCA' = \sphericalangle BC'A = \sphericalangle ACB' ,$$

$$\sphericalangle CAB' = \sphericalangle CA'B = \sphericalangle BAC' ,$$

$$\sphericalangle ABC' = \sphericalangle AB'C = \sphericalangle CBA' .$$



Na primjer:

$$\begin{aligned} \sphericalangle BCA' &= \sphericalangle BPA' && \text{(obodni kutevi nad lukom } BA') \\ &= 180^\circ - \sphericalangle APB && \text{(} A, P, A' \text{ su kolinearne)} \\ &= \sphericalangle AC'B && \text{(četverokut } APBC' \text{ je tetivni)} \end{aligned}$$

Stoga su trokuti $A'BC$, $AB'C$ i ABC' slični, pa vrijedi

$$|BC| : |CA'| : |A'B| = |B'C| : |CA| : |AB'| = |BC'| : |C'A| : |AB|.$$

Zato vrijedi $\sqrt{ab} = \sqrt{|BC| \cdot |AC|} = \sqrt{|B'C| \cdot |CA'|} \leq \frac{1}{2}(|B'C| + |CA'|)$,

odnosno $2\sqrt{ab} \leq |B'C| + |CA'|$

i analogno $2\sqrt{bc} \leq |C'A| + |AB'|$, $2\sqrt{ca} \leq |A'B| + |BC'|$.

Zbrajanjem tih nejednakosti dobivamo

$$2\left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}\right) \leq |AC'| + |C'B| + |BA'| + |A'C| + |CB'| + |B'A|,$$

što je i trebalo dokazati.

Drugi način. Neka je $x = \sphericalangle BPC$, $y = \sphericalangle CPA$ i $z = \sphericalangle APB$.

Slično kao u prvom rješenju pokaže se da kutevi u trokutu $A'CB$ iznose $\pi - x$, $\pi - z$, $\pi - y$ pa prema poučku o sinusima vrijedi

$$|A'B| = \frac{a \sin z}{\sin x}, \quad |A'C| = \frac{a \sin y}{\sin x}.$$

Prema tome je opseg trokuta $A'CB$ jednak

$$\frac{a(\sin x + \sin y + \sin z)}{\sin x}.$$

Potpuno analogno možemo odrediti opsege trokuta $B'AC$ i $C'BA$.

Zbrajanjem dobivamo

$$O + a + b + c = (\sin x + \sin y + \sin z) \left(\frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\sin y} + \frac{c}{\sin z} \right).$$

Primjenom Cauchyjeve nejednakosti dobivamo

$$(\sin x + \sin y + \sin z) \left(\frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\sin y} + \frac{c}{\sin z} \right) \geq \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \right)^2,$$

pa slijedi

$$O \geq \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \right)^2 - (a + b + c) = 2 \left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \right).$$

Zadatak A-3.4.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ te a_1, a_2, \dots, a_n pozitivni realni brojevi za koje vrijedi

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}.$$

Dokaži da za svaki $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ postoji m brojeva iz skupa $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ čiji je zbroj barem m .

Rješenje.

Dokažimo najprije da vrijedi tvrdnja za $m = n$, tj. da je

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n. \quad (1)$$

Pretpostavimo suprotno, da je $a_1 + a_2 + \dots + a_n < n$.

Neka je G geometrijska sredina brojeva a_1, a_2, \dots, a_n . Zbog aritmetičko-geometrijske nejednakosti i zbog pretpostavke vrijedi

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} < \frac{n}{n} = 1,$$

Dakle $G < 1$. Također, iz aritmetičko-geometrijske nejednakosti slijedi

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1^2} \cdot \frac{1}{a_2^2} \cdots \frac{1}{a_n^2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{(a_1 a_2 \cdots a_n)^2}}$$

pa je $\frac{1}{G^2} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} < \frac{n}{n} = 1$, odnosno $G > 1$. Zbog dobivene kontradikcije zaključujemo da je naša pretpostavka pogrešna. Time je dokazana tvrdnja (1).

Dokažimo sada da za svaki $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ postoji m brojeva iz skupa $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ čiji je zbroj barem m .

Pretpostavimo suprotno, da je za neki m zbroj bilo kojih m brojeva iz skupa $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ manji od m . Posebno

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_m &< m, \\ a_2 + a_3 + \dots + a_{m+1} &< m, \\ &\vdots \\ a_n + a_1 + \dots + a_{m-1} &< m, \end{aligned}$$

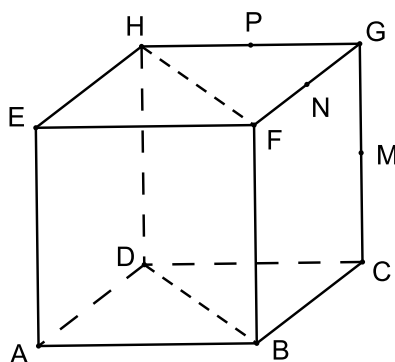
pa zbrajanjem dobivamo $m(a_1 + a_2 + \dots + a_n) < nm$, odnosno $a_1 + a_2 + \dots + a_n < n$. No, to je u kontradikciji s dokazanom tvrdnjom (1).

Zadatak A-3.5.

U jednom vrhu kocke nalaze se dva pauka, a u suprotnom vrhu muha. Pauca i muha kreću se isključivo po bridovima kocke jednakim konstantnim brzinama. U svakom trenutku paucima je poznata pozicija muhe i muhi je poznata pozicija pauka. Dokaži da pauca mogu uhvatiti muhu. Smatra se da je muha uhvaćena ako se nađe u istoj točki kao i jedan od paukova.

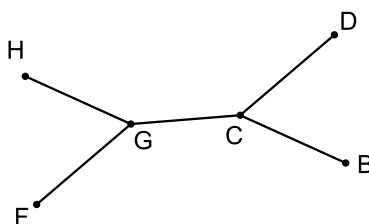
Rješenje.

Označimo vrhove kocke s A, B, C, D, E, F, G, H i neka se pauca nalaze u vrhu A , a muha u vrhu G .



Strategija za pauca je sljedeća: prvi pauk kreće se simetrično muhi u odnosu na središte kocke sve dok ona (eventualno) ne stigne do polovišta nekog od bridova \overline{GC} , \overline{GF} , \overline{GH} . Označimo ta polovišta M, N, P redom.

Ukoliko muha stigne u neku od tih točaka, npr. u točku M , prvi pauk nastavlja kretanje simetrično muhi u odnosu na ravninu $BDHF$ (odnosno $BCHE$ ili $CDEF$ ako je muha stigla u N ili P). Taj će pauk uhvatiti muhu ako ona stigne u neku od točaka B, D, F, H . Ukoliko muha ostane na konturi:



uhvatit će ju drugi pauk. On najprije kreće prema vrhu G . Ako ju nije uhvatio putem, postoje dvije mogućnosti.

1. slučaj. Muha još nije prešla ni jednu od točaka M, N, P .

Tada je muha na jednom od bridova \overline{GC} , \overline{GF} , \overline{GH} , recimo na \overline{GC} . Drugi pauk kreće iz vrha G prema njoj. Kada muha pređe točku M prvi pauk joj ograničava kretanje na konturu sa slike, pa ju drugi pauk slijedi prema jednoj od točaka B ili D .

2. slučaj. Muha je već prešla neku od točaka M, N, P .

Recimo da je muha prešla točku M . Tada je prvi pauk ograničio njeno kretanje na konturu na slici pa ju drugi pauk samo slijedi.

Muha će u oba slučaja biti uhvaćena.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija

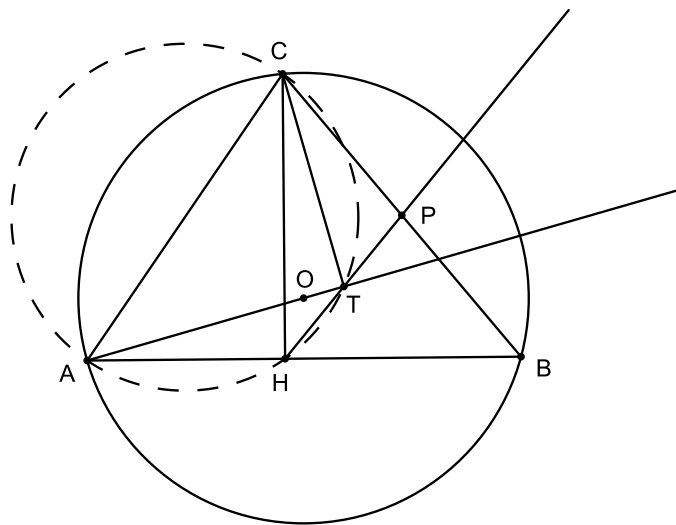
30. ožujka 2009.

Zadatak A-4.1.

Neka je \overline{CH} visina šiljastokutnog trokuta ABC , a točka O središte njemu opisane kružnice. Ako je T nožište okomice iz točke C na pravac AO , dokaži da pravac TH prolazi polovištem dužine \overline{BC} .

Rješenje.

Označimo s P sjecište pravca TH i dužine \overline{BC} . Dokazat ćemo da je P polovište stranice \overline{BC} .



Kako je $\sphericalangle AHC = \sphericalangle ATC = 90^\circ$, točke A, H, T i C leže na istoj kružnici, pa je

$$\begin{aligned} \sphericalangle PHC &= \sphericalangle THC = \sphericalangle TAC && \text{(obodni kutovi nad istim lukom)} \\ &= \sphericalangle OAC = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle AOC) && \text{(trokut } AOC \text{ je jednakokračan)} \\ &= 90^\circ - \sphericalangle ABC && \text{(središnji i obodni kut)} \\ &= 90^\circ - \sphericalangle HBC = \sphericalangle BCH = \sphericalangle PCH. \end{aligned}$$

Dakle, trokut PCH je jednakokračan. Dalje je

$$\sphericalangle PBH = 90^\circ - \sphericalangle BCH = 90^\circ - \sphericalangle PHC = \sphericalangle PHB,$$

pa je i trokut PHB jednakokračan. Zaključujemo da vrijedi $|PC| = |PH| = |PB|$ i time je tvrdnja zadatka dokazana.

Zadatak A-4.2.

Dani su realni brojevi $x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_n$. Dokaži da je

$$x_0 - x_n + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq 2n.$$

Kada vrijedi jednakost?

Rješenje.

Prvi način. Označimo $a_1 = x_0 - x_1$, $a_2 = x_1 - x_2$, ..., $a_n = x_{n-1} - x_n$. Tada su a_1, \dots, a_n pozitivni realni brojevi.

Nejednakost koju trebamo dokazati možemo zapisati kao

$$x_0 - x_1 + x_1 - \dots - x_{n-1} + x_{n-1} - x_n + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq 2n,$$

odnosno
$$\sum_{i=1}^n \left(a_i + \frac{1}{a_i} \right) \geq 2n.$$

No ovo direktno slijedi iz nejednakosti $x + x^{-1} \geq 2$ ($x \geq 0$).

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_i = \frac{1}{a_i}$ za sve $i = 1, \dots, n$, što je zbog $a_i > 0$ ekvivalentno s $a_i = 1$. Dakle, jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$x_0 - x_1 = x_1 - x_2 = \dots = x_{n-1} - x_n = 1,$$

tj. ako je x_0, x_1, \dots, x_n aritmetički niz s razlikom -1 .

Drugi način. Označimo $a_1 = x_0 - x_1$, $a_2 = x_1 - x_2, \dots, a_n = x_{n-1} - x_n$.

Nejednakost između aritmetičke i harmonijske sredine povlači da je

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}.$$

Zato je

$$\frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq \frac{n^2}{x_0 - x_1 + x_1 - x_2 + \dots + x_{n-1} - x_n} = \frac{n^2}{x_0 - x_n}.$$

Traženu nejednakost dobivamo sada iz $x_0 - x_n + \frac{n^2}{x_0 - x_n} \geq 2n$, što je ekvivalentno s

$$\left(\sqrt{x_0 - x_n} - \frac{n}{\sqrt{x_0 - x_n}} \right)^2 \geq 0. \tag{1}$$

Jednakost se u A-H nejednakosti postiže ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ tj. $x_0 - x_1 = x_1 - x_2 = \dots = x_{n-1} - x_n$.

U drugoj korištenoj nejednakosti (1) jednakost se postiže ako i samo ako je $x_0 - x_n = n$.

To znači da nejednakost iz zadatka postaje jednakost ako i samo ako je x_0, x_1, \dots, x_n aritmetički niz s razlikom -1 .

Zadatak A-4.3.

Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da je

$$f(x) = \max_{y \in \mathbb{R}} (2xy - f(y))$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje.

Neka funkcija f zadovoljava uvjet zadatka. Tada je $f(x) \geq 2xy - f(y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$, pa za $y = x$ dobivamo da je $f(x) \geq x^2$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Nadalje iz uvjeta slijedi da za svaki x postoji $y = y_x$ takav da je $f(x) = 2xy_x - f(y_x)$. Iz ovog i iz posljednje nejednakosti dobivamo

$$x^2 \leq f(x) = 2xy_x - f(y_x) \leq 2xy_x - y_x^2,$$

pa je $(x - y_x)^2 \leq 0$, tj. $y_x = x$.

Sada iz $f(x) = 2xy_x - f(y_x)$ slijedi $f(x) = x^2$.

Ova funkcija je rješenje zadatka jer za nju vrijedi

$$\max_{y \in \mathbb{R}} (2xy - f(y)) = \max_{y \in \mathbb{R}} (2xy - y^2) = \max_{y \in \mathbb{R}} (x^2 - (x - y)^2) = x^2 = f(x).$$

Zadatak A-4.4.

Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) , $m, n > 1$, za koje je $n^3 - 1$ djeljivo s $mn - 1$.

Rješenje.

Neka su $m, n > 1$ takvi da je $mn - 1 \mid n^3 - 1$.

Vrijedi $(n^3 - 1)m - n^2(mn - 1) = n^2 - m$, pa $mn - 1 \mid n^2 - m$.

Također $m(n^2 - m) - (mn - 1)n = n - m^2$, pa $mn - 1 \mid n - m^2$.

Ako je $n > m^2$, tada $mn - 1 \leq n - m^2 \leq n - 1$, pa slijedi $mn \leq n$, što je nemoguće.

Ako je $n = m^2$, tada je očito $m^3 - 1 \mid m^6 - 1$, pa su svi parovi (m, m^2) , $m > 1$ rješenja.

Ako je $n < m^2$, iz $mn - 1 \leq n^3 - 1$ zaključujemo $\sqrt{n} < m \leq n^2$.

Ako je $n^2 - m > 0$, vrijedi $mn - 1 \leq n^2 - m < n^2 - 1$, odnosno $m < n$, što je nemoguće, jer iz $mn - 1 \leq m^2 - n < m^2 - 1$, slijedi $n < m$.

Dakle, mora biti $m = n^2$. Budući da $n^3 - 1 \mid n^3 - 1$, svi parovi (n^2, n) , $n > 1$ su također rješenja.

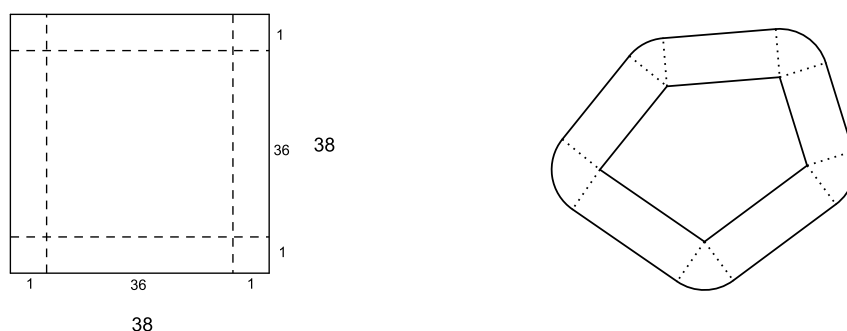
Uvjet zadovoljavaju svi parovi oblika (k, k^2) i (k^2, k) , gdje je $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$.

Zadatak A-4.5.

Unutar kvadrata stranice duljine 38 smješteno je 100 konveksnih mnogokuta, pri čemu je površina svakog od njih najviše π , a opseg najviše 2π . Dokaži da unutar tog kvadrata postoji krug polumjera 1 koji ne siječe niti jedan od danih 100 mnogokuta.

Rješenje.

Središte traženog kruga mora biti udaljeno za barem 1 od rubova kvadrata. Naći ćemo to središte u kvadratu kojemu su stranice paralelne sa stranicama početnog kvadrata i udaljene od njih za 1. Duljina stranice tog manjeg kvadrata je 36.



Skup svih točaka koje leže na udaljenosti manjoj od 1 od konveksnog mnogokuta P je područje Q omeđeno dužinama paralelnim stranicama poligona P i kružnim lukovima koji spajaju krajeve tih dužina (vidi sliku).

Za površine likova P i Q vrijedi

$$\text{Površina}(Q) = \text{Površina}(P) + \text{Opseg}(P) \times 1 + \pi$$

jer kružni isječci u kutovima lika Q čine zajedno puni krug polumjera 1.

Zbog uvjeta zadatka $\text{Površina}(P) < \pi$ i $\text{Opseg}(P) < 2\pi$, pa je $\text{Površina}(Q) < 4\pi$.

Likovi Q mogu se preklapati, no površina njihove unije, tj. skupa svih točaka koje su udaljene za najviše 1 od nekog od 100 danih mnogokuta iznosi najviše 400π .

Kako je $400\pi \leq 400 \cdot 3.2 = 40 \cdot 32 = 36^2 - 4^2 < 36^2$, postoji točka unutar kvadrata stranice 36 koja nije prekrivena ni jednim likom Q , pa tu točku možemo uzeti za središte traženog kruga polumjera 1. Taj krug ne siječe niti jedan od danih mnogokuta.