

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A kategorija

30. ožujka 2009.

1. Odredi sve trojke uzastopnih neparnih prirodnih brojeva čiji je zbroj kvadrata jednak nekom četveroznamenkastom broju kojem su sve znamenke jednake.
2. Zadan je konveksan četverokut $ABCD$ koji nije paralelogram. Neka pravac koji prolazi kroz polovišta dijagonala četverokuta siječe stranice \overline{AB} i \overline{CD} redom u točkama M i N . Dokaži da trokuti ABN i CDM imaju jednake površine.

3. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi, takvi da je $xyz = 1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3 + z^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3 + x^3}{z^2 + zx + x^2} \geq 2.$$

4. Dan je pravilni deveterokut sa stranicom duljine a . Kolika je razlika duljina njegove najdulje i najkraće dijagonale?
5. Dva igrača, A i B igraju sljedeću igru: A i B zapisuju naizmjenično po jednu znamenku sve dok ne napišu šesteroznamenkasti broj, pri čemu se niti jedna znamenka ne smije ponoviti. Prva znamenka mora biti različita od 0. Igrač A igra prvi, a znamenke se pišu redom s lijeva na desno. Igrač A pobjeđuje ako je napisani šesteroznamenkasti broj djeljiv s 2, 3 ili 5, a u suprotnom pobjeđuje igrač B . Dokaži da igrač A ima strategiju za pobjedu, tj. može pobijediti neovisno o igri igrača B .

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A kategorija

30. ožujka 2009.

1. Neka su a i b cijeli brojevi takvi da je $a^2 + 2b$ kvadrat cijelog broja. Dokaži da se broj $a^2 + b$ može prikazati kao zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva.
2. Dan je četverokut $ABCD$. Opisana kružnica trokuta ABC siječe stranice \overline{CD} i \overline{DA} redom u točkama P i Q , a opisana kružnica trokuta CDA stranice \overline{AB} i \overline{BC} redom u točkama R i S . Pravci BP i BQ sijeku pravac RS redom u točkama M i N . Dokaži da točke M , N , P i Q leže na istoj kružnici.
3. Nađi sve parove kompleksnih brojeva (w, z) , $w \neq z$, koji zadovoljavaju sustav jednadžbi
$$\begin{aligned}w^5 + w &= z^5 + z, \\w^5 + w^2 &= z^5 + z^2.\end{aligned}$$
4. Odredi najveću vrijednost realne konstante λ takve da za sve pozitivne realne brojeve u, v, w za koje je $u\sqrt{vw} + v\sqrt{wu} + w\sqrt{uv} \geq 1$ vrijedi nejednakost $u + v + w \geq \lambda$.
5. U svako polje tablice $m \times n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) upisano je slovo A ili B . Pritom nikoja dva susjedna polja (sa zajedničkom stranicom) ne sadrže isto slovo. U jednom koraku biraju se dva susjedna polja, i oba slova na tim poljima zamijene se novim slovima po sljedećem pravilu:
 - umjesto slova A upisuje se slovo B ,
 - umjesto slova B upisuje se slovo C ,
 - umjesto slova C upisuje se slovo A .

Za koje m i n nakon konačno mnogo koraka možemo postići da u svim poljima u kojima je na početku bilo napisano slovo A sada piše slovo B , a u svim poljima u kojima je na početku bilo napisano slovo B sada piše slovo A ?

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A kategorija

30. ožujka 2009.

1. Odredi sve prirodne brojeve m i n za koje je $6^m + 2^n + 2$ potpun kvadrat.
2. Neka je ABC trokut u kojem vrijedi $|AC| > |BC|$. Izrazi površinu trokuta određenog stranicom \overline{AB} , simetralom stranice \overline{AB} i simetralom kuta $\sphericalangle ACB$ pomoću duljina stranica trokuta ABC .
3. Neka je ABC trokut sa stranicama duljina a , b i c i neka je P točka u njegovoj unutrašnjosti. Neka pravac AP ponovno siječe kružnicu opisanu trokutu BCP u točki A' i neka su B' i C' točke definirane analogno. Dokaži da za opseg O šesterokuta $AB'CA'BC'$ vrijedi

$$O \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}).$$

4. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te a_1, a_2, \dots, a_n pozitivni realni brojevi za koje vrijedi

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}.$$

Dokaži da za svaki $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ postoji m brojeva iz skupa $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ čiji je zbroj barem m .

5. U jednom vrhu kocke nalaze se dva pauka, a u suprotnom vrhu muha. Pauzi i muha kreću se isključivo po bridovima kocke jednakim konstantnim brzinama. U svakom trenutku paucima je poznata pozicija muhe i muhi je poznata pozicija pauka. Dokaži da pauci mogu uhvatiti muhu. Smatra se da je muha uhvaćena ako se nađe u istoj točki kao i jedan od paukova.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A kategorija

30. ožujka 2009.

1. Neka je \overline{CH} visina šiljastokutnog trokuta ABC , a točka O središte njemu opisane kružnice. Ako je T nožište okomice iz točke C na pravac AO , dokaži da pravac TH prolazi polovištem dužine \overline{BC} .

2. Dani su realni brojevi $x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_n$. Dokaži da je

$$x_0 - x_n + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq 2n.$$

Kada vrijedi jednakost?

3. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da je

$$f(x) = \max_{y \in \mathbb{R}} (2xy - f(y))$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

4. Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) , $m, n > 1$, za koje je $n^3 - 1$ djeljivo s $mn - 1$.
5. Unutar kvadrata stranice duljine 38 smješteno je 100 konveksnih mnogokuta, pri čemu je površina svakog od njih najviše π , a opseg najviše 2π . Dokaži da unutar tog kvadrata postoji krug polumjera 1 koji ne siječe niti jedan od danih 100 mnogokuta.