

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

7. razred – rješenja

Pula, 30. ožujka 2009.

1. Neka su duljine stranica trokuta a , b i c , te duljine odgovarajućih visina v_a , v_b i v_c .

Kako je $v_a : v_b : v_c = 3 : 4 : 5$, slijedi da je $v_a = 3k$, $v_b = 4k$, $v_c = 5k$, $k \in \mathbb{Q}$.

Kako je površina trokuta jednaka polovini umnoška duljine stranice i duljine odgovarajuće visine, imamo da je

$$a = \frac{2P}{3k}, \quad b = \frac{2P}{4k}, \quad c = \frac{2P}{5k},$$

pri čemu P označava površinu trokuta. Zbog toga vrijedi razmjer $a : b : c = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5}$.

Svođenjem na zajednički nazivnik imamo da je $a : b : c = \frac{20}{60} : \frac{15}{60} : \frac{12}{60}$, odnosno $a : b : c = 20 : 15 : 12$.

Stoga je $a = 20l$, $b = 15l$, $c = 12l$, $l \in \mathbb{Q}$. Očito je a najdulja stranica, pa je $20l = 12$, odakle je $l = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

Konačno, opseg trokuta je $o = a + b + c = 20l + 15l + 12l = 47l = 47 \cdot \frac{3}{5} = \frac{141}{5} = 28.2$ cm.

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka prva tvornica proizvodi dnevno x automobila, a druga y automobila. Prema uvjetu zadatka moraju vrijediti sljedeće tri nejednakosti:

$$x + y < 18, \quad y < 2x, \quad x + 2 < y - 2.$$

Zbrojimo li prvu i treću nejednakost dobivamo da je $x + y + x + 2 < 18 + y - 2$, odakle je $2x < 14$, tj. $x < 7$.

Druga i treća nejednakost daju $x + 4 < y < 2x$, odakle je $x + 4 < 2x$, pa je $x > 4$. Stoga je $x = 5$ ili $x = 6$.

Ako je $x = 5$, iz druge i treće nejednakosti dobivamo da istovremeno mora biti $y < 10$ i $y > 9$, što nije moguće.

Dakle, mora biti $x = 6$, odakle opet iz druge i treće nejednakosti dobivamo da je $y < 12$ i $y > 10$, pa je $y = 11$.

Neposrednom provjerom uočavamo kako $x = 6$ i $y = 11$ zadovoljavaju uvjete zadatka.

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka je \overline{abc} troznamenkasti broj koji zadovoljava uvjete zadatka.

Tada je $a \neq b \neq c$ i razlomci $\frac{\overline{abc}}{\overline{ab}}$, $\frac{\overline{abc}}{\overline{bc}}$, $\frac{\overline{abc}}{\overline{ac}}$ su cijeli brojevi.

1° Kako je $\frac{\overline{abc}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{ab0} + c}{\overline{ab}} = 10 + \frac{c}{\overline{ab}}$, slijedi da je $\frac{c}{\overline{ab}}$ cijeli broj, a to je moguće samo ako je $c = 0$.

2° Sada imamo da je $\frac{\overline{ab0}}{\overline{a0}} = \frac{\overline{ab}}{a} = \frac{10a + b}{a} = 10 + \frac{b}{a}$, pa b mora biti višekratnik od a .

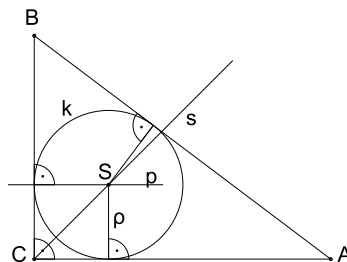
Kako je $a \neq b$, slijedi da znamenka a može poprimiti vrijednosti iz skupa $\{1, 2, 3, 4\}$.

3° Nadalje, $\frac{\overline{ab0}}{\overline{b0}} = \frac{\overline{ab}}{b} = \frac{10a + b}{b} = 1 + \frac{10a}{b}$, pa b mora biti djelitelj od $10a$.

Konačno, kombiniranjem uvjeta 2° i 3° dobivamo pet rješenja: 120, 150, 240, 360, 480.

..... UKUPNO 10 BODOVA

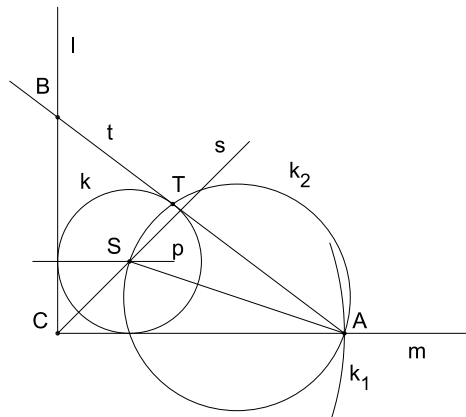
4. ANALIZA



Središte S upisane kružnice je presjek simetrale s kuta γ i pravca p usporednog s \overline{AC} i udaljenog od \overline{AC} za ρ . Vrh B je presjek tangente iz točke A na upisanu kružnicu k i okomice na \overline{AC} u točki C .

KONSTRUKCIJA

- 1° Konstruirati pravi kut γ s vrhom C i krakovima m i l .
- 2° Konstruirati simetralu s kuta γ .
- 3° Konstruirati dužinu \overline{AC} , pri čemu je točka A sjecište kraka m i kružnice $k_1(C, b)$.
- 4° Konstruirati pravac p usporedan s \overline{AC} i udaljen od \overline{AC} za ρ . Sjecište pravaca s i p je središte S trokutu upisane kružnice.
- 5° Konstruirati upisanu kružnicu $k(S, \rho)$.
- 6° Konstruirati kružnicu k_2 nad promjerom \overline{SA} . Neka je T sjecište kružnica k i k_2 , koje ne pripada kraku m . Kako je $\sphericalangle ATS$ obodni kut nad promjerom kružnice k_2 , to je $\sphericalangle ATS = 90^\circ$, pa je pravac $t = AT$ tangenta kružnice k . Sjecište tangente t i kraka l određuje vrh B trokuta ABC .

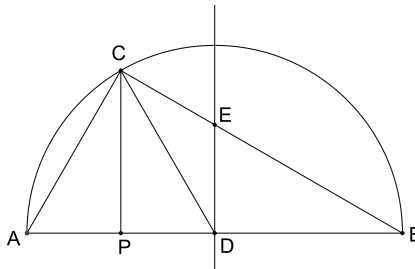


RASPRAVA

Zadatak ima jedinstveno rješenje.

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Neka je D polovište hipotenuze \overline{AB} , neka je P nožište visine iz vrha C te neka je E sjecište simetrale hipotenuze sa stranicom \overline{BC} .



Kako je površina trokuta DBE tri puta manja od površine trokuta ABC i budući je $|DB| = \frac{|AB|}{2}$, slijedi jednakost

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{|AB|}{2} \cdot |ED| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |AB| \cdot |CP|,$$

odakle dobivamo razmjernost

$$\frac{|CP|}{|ED|} = \frac{3}{2}.$$

Nadalje, iz sličnosti trokuta DBE i PBC dobivamo da je

$$\frac{|BP|}{|BD|} = \frac{|CP|}{|ED|} = \frac{3}{2}.$$

Zbog toga je $|BP| = \frac{3}{2}|BD| = \frac{3}{2} \cdot \frac{|AB|}{2} = \frac{3}{4}|AB|$, pa je $|AP| = |AB| - |BP| = \frac{1}{4}|AB|$. Stoga je i $|PD| = \frac{1}{4}|AB|$.

Prema tome, točka P je polovište dužine \overline{AD} , pa je trokut ADC jednakokrakan, tj. $|AC| = |DC|$.

No, točka D je središte opisane kružnice pravokutnog trokuta ABC , pa je $|AD| = |DC|$.

Dakle, trokut ADC je jednakostraničan, pa je $\sphericalangle CAB = 60^\circ$.

Konačno, kako je zbroj kutova u trokutu jednak 180° , laganom dobivamo da je $\sphericalangle ABC = 30^\circ$.

..... UKUPNO 10 BODOVA