

# DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

## 8. razred – rješenja

Pula, 30. ožujka 2009.

1. Kvadriranjem zadane jednakosti dobivamo da je

$$x + y + 2\sqrt{xy} = xy + x + y,$$

odakle je  $2\sqrt{xy} = xy$ , odnosno, nakon ponovnog kvadriranja,  $4xy = x^2y^2$ . Odatle je

$$x^2y^2 - 4xy = xy(xy - 4) = 0.$$

Sada, kako su  $x$  i  $y$  prirodni brojevi, slijedi da je  $xy - 4 = 0$ , tj.  $xy = 4$ . Konačno, kako su  $x$  i  $y$  prirodni brojevi čiji je umnožak jednak 4, dobivamo tri uređena para koji zadovoljavaju uvjete zadatka: (1, 4), (2, 2), (4, 1).

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka su  $a$  i  $b$  neparni brojevi. Tada ih možemo prikazati u obliku  $a = 2m + 1$  i  $b = 2n + 1$ , pri čemu su  $m$  i  $n$  cijeli brojevi. Sada je

$$a^2 - b^2 = (2m + 1)^2 - (2n + 1)^2 = (4m^2 + 4m + 1) - (4n^2 + 4n + 1) = 4(m^2 + m - n^2 - n),$$

odakle odmah slijedi da je razlika kvadrata djeljiva s 4.

Preostaje još dokazati da je broj  $m^2 + m - n^2 - n$  paran, tj. djeljiv s 2. Naime, taj broj možemo zapisati u obliku  $m^2 + m - n^2 - n = m(m + 1) - n(n + 1)$ .

Sada, brojevi  $m(m + 1)$  i  $n(n + 1)$  su umnošci dvaju uzastopnih cijelih brojeva, pa su oni parni.

Stoga je i njihova razlika paran broj, odakle slijedi da je broj  $m^2 + m - n^2 - n$  djeljiv s 2.

Dakle, razlika kvadrata dvaju neparnih brojeva je djeljiva s  $4 \cdot 2 = 8$ , što je i trebalo dokazati.

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Pogledajmo prvo koliko ima šesteroznamenkastih brojeva koji počinju s izabranom znamenkom

$a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ :

$$\underline{a} \text{ } \_ \_ \_ \_ \_ \_.$$

Njih ima  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ , zato jer za svaku iduću znamenku imamo jednu mogućnost manje.

Kako je  $4 \cdot 120 = 480 < 500$  i  $5 \cdot 120 = 600 > 500$ , slijedi da je  $a = 5$ , pa traženi broj počinje znamenkom 5.

Promatramo sada brojeve

$$\underline{5} \underline{b} \text{ } \_ \_ \_ \_ \_.$$

pri čemu je  $b \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$  izabrana znamenka. Takvih brojeva ima  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ .

Sada, kako je  $480 + 24 = 504 > 500$ , mora biti  $b = 1$ .

Postupak nastavljamo dalje. Promatramo brojeve

$$\underline{5} \underline{1} \underline{c} \text{ } \_ \_ \_ \_.$$

pri čemu je  $c \in \{2, 3, 4, 6\}$  izabrana znamenka. Takvih brojeva ima  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ .

Kako je  $480 + 3 \cdot 6 = 498 < 500$  i  $480 + 4 \cdot 6 = 504 > 500$ , slijedi da je  $c = 6$ .

Nadalje, promatramo brojeve

$$\underline{5} \underline{1} \underline{6} \underline{d} \text{ } \_ \_.$$

pri čemu je  $d \in \{2, 3, 4\}$ . Za izabranu znamenku  $d$ , tih brojeva ima  $2 \cdot 1 = 2$ .

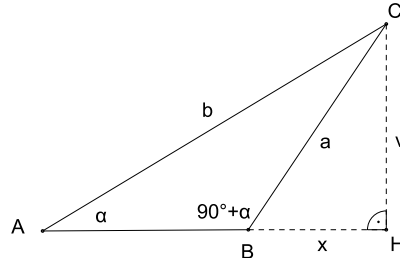
Konačno, kako je  $480 + 3 \cdot 6 + 2 = 500$ , mora biti  $d = 2$ . Štoviše, kako je  $480 + 3 \cdot 6 + 2 = 500$ ,

traženi broj mora biti najveći broj oblika  $\underline{5162ef}$  iz promatranog skupa brojeva, pa je  $e = 4$ ,  $f = 3$ .

Dakle, na petstotom mjestu se nalazi broj 516243.

..... UKUPNO 10 BODOVA

4. *Prvi način:* Uvedimo oznake  $|AB| = c$ ,  $|BC| = a$ ,  $|CA| = b$ ,  $\sphericalangle CAB = \alpha$ ,  $\sphericalangle ABC = \beta$ ,  $\sphericalangle BCA = \gamma$ .  
 Prema uvjetu zadatka je  $\beta = 90^\circ + \alpha$ , pa je zadani trokut tupokutan.  
 Neka je  $H$  nožište visine iz vrha  $C$ , te neka je  $|CH| = v$  i  $|BH| = x$ .



Pokažimo sada da su pravokutni trokuti  $AHC$  i  $BHC$  slični. Naime, očito je  $\sphericalangle CBH = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) = 90^\circ - \alpha$ , odakle je  $\sphericalangle HCB = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha = \sphericalangle CAH$ .  
 Dakle, pravokutni trokuti  $AHC$  i  $BHC$  imaju jednak šiljasti kut. Stoga im je jednak i drugi šiljasti kut, pa su oni slični. Iz dokazane sličnosti, uz istaknute oznake, vrijedi razmjer  $\frac{b}{v} = \frac{a}{x}$ , odakle je  $x = \frac{av}{b}$ .  
 S druge strane, primjenom Pitagorinog poučka na trokut  $BHC$  slijedi jednakost  $x^2 + v^2 = a^2$ .  
 Uvrstimo li u tu jednakost dobiveni izraz za  $x$ , imamo da je

$$\frac{a^2 v^2}{b^2} + v^2 = a^2, \quad \text{tj.} \quad \frac{a^2 v^2 + b^2 v^2}{b^2} = a^2,$$

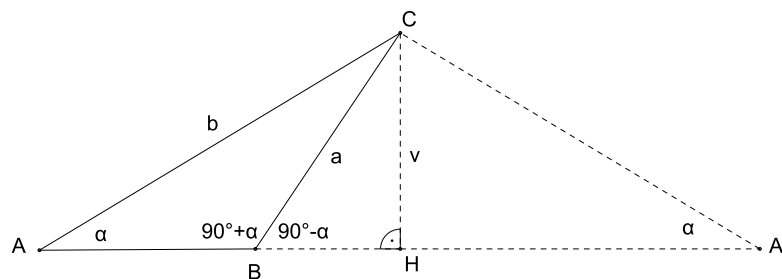
odakle je

$$v^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}, \quad \text{tj.} \quad v = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Konačno, kako je  $a = 6$  cm,  $b = 8$  cm, imamo da je

$$v = \frac{6 \cdot 8}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{48}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{48}{\sqrt{100}} = \frac{48}{10} = 4.8 \text{ cm.}$$

*Drugi način:* U ovom rješenju koristimo iste oznake kao i u prvom rješenju.  
 Neka je  $A'$  centralno simetrična slika točke  $A$  u odnosu na točku  $H$ .



Tada je trokut  $AA'C$  jednakokrakan pa je  $|A'C| = b$  i  $\sphericalangle BA'C = \alpha$ .  
 Uočimo da je trokut  $BA'C$  pravokutan zato jer je  $\sphericalangle A'CB = 180^\circ - (90^\circ - \alpha + \alpha) = 90^\circ$ .  
 Dakle, visina  $\overline{CH}$  trokuta  $ABC$  podudara se s visinom pravokutnog trokuta  $BA'C$ . Izrazimo li površinu pravokutnog trokuta  $BA'C$  na dva načina, dobivamo jednakost

$$\frac{ab}{2} = \frac{|BA'|v}{2}.$$

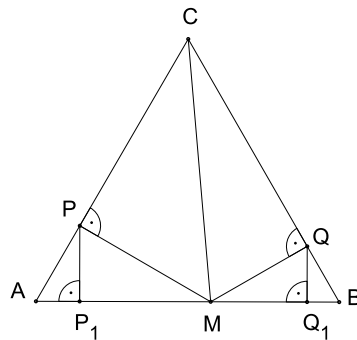
Sada, prema Pitagorinom poučku je  $|BA'| = \sqrt{a^2 + b^2}$ , pa uvrštavanjem u prethodnu jednakost dobivamo da je

$$v = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

odakle kao i u prvom rješenju dobivamo da je  $v = 4.8$  cm.

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Neka je duljina stranice trokuta  $ABC$  jednaka  $a$ .



Kako je površina trokuta  $ABC$  jednaka zbroju površina trokuta  $AMC$  i  $MBC$ , slijedi da je

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a \cdot |MP|}{2} + \frac{a \cdot |MQ|}{2},$$

odakle je

$$|MP| + |MQ| = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \tag{1}$$

Pravokutni trokut  $P_1MP$  ima šiljaste kutove od  $30^\circ$  i  $60^\circ$ , pa je on polovina jednakostraničnog trokuta. Zbog toga je  $\overline{P_1M}$  visina jednakostraničnog trokuta sa stranicom  $\overline{PM}$ , pa je

$$|P_1M| = \frac{|PM|\sqrt{3}}{2}.$$

Slično, pravokutni trokut  $MQ_1Q$  je polovina jednakostraničnog trokuta, pa je

$$|MQ_1| = \frac{|MQ|\sqrt{3}}{2}.$$

Stoga, zbog jednakosti (1) vrijedi

$$\begin{aligned} |P_1Q_1| &= |P_1M| + |MQ_1| = \frac{|PM|\sqrt{3}}{2} + \frac{|MQ|\sqrt{3}}{2} \\ &= (|PM| + |MQ|) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4} = \frac{3}{4}|AB|. \end{aligned}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA