Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

1. (20) "Tomislav i ja", reče Krešimir, "možemo završiti posao za 20 dana". No, ako bih radio s Ivanom posao bismo obavili za 5 dana ranije."

   "Imam bolju kombinaciju!" reče Ivan. Ako bih radio s Tomislavom završio bih posao za petinu vremena prije nego da radim s Krešimirom."

   Za koliko bi dana svaki od njih završio posao sam, a za koliko bi ga dana završili radeći svi zajedno?

2. (20) Riješi nejednadžbu

$$|||9-x|-x|+2x| \leq 2009.$$

3. (20) Duljina osnovice jednakokračnog trokuta ABC je 12 cm, a duljina kraka je 10 cm. Točke P i Q su polovišta krakova $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$, a S i R su njihove ortogonalne projekcije na $\overline{AB}$. Odredi udaljenost nožišta okomica iz točaka P i R na spojnicu $\overline{SQ}$.

4. (20) Ako je $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$ i $ac+bd=0$, koliko je $ab+cd$?

5. (20) Ako realni brojevi $x,\ y$ zadovoljavaju uvjet $2x+4y=1$ dokaži nejednakost $x^2+y^2 \geq \dfrac{1}{20}$.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

1. (20) Za kompleksne brojeve z, w takve da je $|z| = |w| = |z - w|$ izračunaj $\left(\dfrac{z}{w}\right)^{99}$.

2. (20) Dani su realni brojevi $0 < a < b$. Odredi sva rješenja nejednadžbe

$$\frac{a}{x-b} + \frac{b}{x-a} \leq 2.$$

3. (20) U pravokutnom trokutu ABC točka D je nožište visine spuštene iz vrha C na hipotenuzu $\overline{AB}$, točka E je polovište dužine $\overline{CD}$, a točka F je sjecište pravaca AE i BC. Ako je $|AD| = 4$ i $|BD| = 9$, odredi duljinu dužine $\overline{AF}$.

4. (20) Točke A, B i C leže na istom pravcu i B je između A i C. S iste strane pravca AC konstruirane su tri polukružnice promjera $|AB| = 2R$, $|BC| = 2r$ i $|AC|$. Odredi polumjer kružnice koja dodiruje sve tri polukružnice.

5. (20) Nađi sva rješenja jednadžbe $\lfloor x \rfloor \{x\} = 2009x$, gdje je $\lfloor x \rfloor$ najveći cijeli broj koji nije veći od x, a $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

1. (20) Nađi sva realna rješenja jednadžbe

$$4x^3 - \sqrt{1-x^2} - 3x = 0.$$

2. (20) Za realan broj $a > 0,\ a \neq 1$ dana je funkcija

$$f(x) = \log_a x + \log_{a^2} x.$$

U zavisnosti o parametru a nađi sva rješenja jednadžbe

$$f(x + a^2 - a) = 2f(x).$$

3. (20) Izračunaj zbroj

$$\frac{\sin 1}{\cos 0 \cdot \cos 1} + \frac{\sin 1}{\cos 1 \cdot \cos 2} + \frac{\sin 1}{\cos 2 \cdot \cos 3} + \ldots + \frac{\sin 1}{\cos 2008 \cdot \cos 2009}.$$

4. (20) Međusobna udaljenost središta sfera polumjera R i r $(r < R)$ jednaka je a $(R - r < a \leq R + r)$.

   a) Izrazi obujam V pravilnog kružnog stošca, opisanog oko ovih sfera, u zavisnosti o parametrima a, R i r.

   b) Izračunaj volumen stošca ako je $R = 10$, $r = 6$ i $a = 8$.

5. (20) Dvije jednake šahovske ploče (8×8 polja) imaju zajedničko središte i jedna potpuno prekriva drugu. Jedna od njih se zarotira oko središta za $45°$. Odredi površinu presjeka svih crnih polja jedne ploče sa svim crnim poljima druge ploče ako je površina jednog polja jednaka 1.

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske

Agencija za odgoj i obrazovanje

Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B kategorija

Pula, 30. ožujka 2009.

1. (20) U rastućem aritmetičkom nizu umnožak drugog i trećeg člana je 3, a umnožak trećeg i petog je -3. Koliko prvih članova niza treba zbrojiti da bi zbroj bio minimalan? Koliki je taj zbroj?

2. (20) U Kartezijevom koordinatnom sustavu zadane su točke $A\left(-\frac{17}{2}, 0\right)$, $B(2,0)$, $C(-1,0)$. Nađi sve točke pravca $y = x - 3$ iz koje se dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ vide pod istim kutom različitim od nule.

3. (20) Koliki su minimum i maksimum funkcije

$$y = \frac{\sin^2 x - \sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}?$$

Za koje $x \in [0, 2\pi]$ funkcija poprima minimalnu, a za koje maksimalnu vrijednost?

4. (20) Nađi formulu za zbroj

$$S_n = \frac{3}{1! + 2! + 3!} + \frac{4}{2! + 3! + 4!} + \frac{5}{3! + 4! + 5!} + \ldots + \frac{n+2}{n! + (n+1)! + (n+2)!}.$$

Pokaži da niz zbrojeva konvergira i odredi mu limes!

5. (20) Kocka $ABCDA'B'C'D'$ presječena je ravninom koja sadrži prostornu dijagonalu kocke $\overline{BD'}$ i ima najmanju moguću površinu presjeka s kockom. Koliki je kosinus kuta između te ravnine i ravnine $ABCD$?