

Decision Making

S naglaskom na Metodu Potencijala

Lavoslav Čaklović

caklovic@math.hr

PMF Matematički odjel

Sveučilište u Zagrebu

Sadržaj

- Ciljno razmišljanje
- Primjeri
 - Ocjenjivanje
 - Izbor motocikla
 - Primjeri na WEBu
- Uspoređivanje u parovima
- Organizacija inputa
- Normalni integral
- Agregacija tokova
- Tabela odlučivanja
- Agregacija ocjena
- Inverzija rangova
- Otvoreni problemi

Ciljno razmišljanje

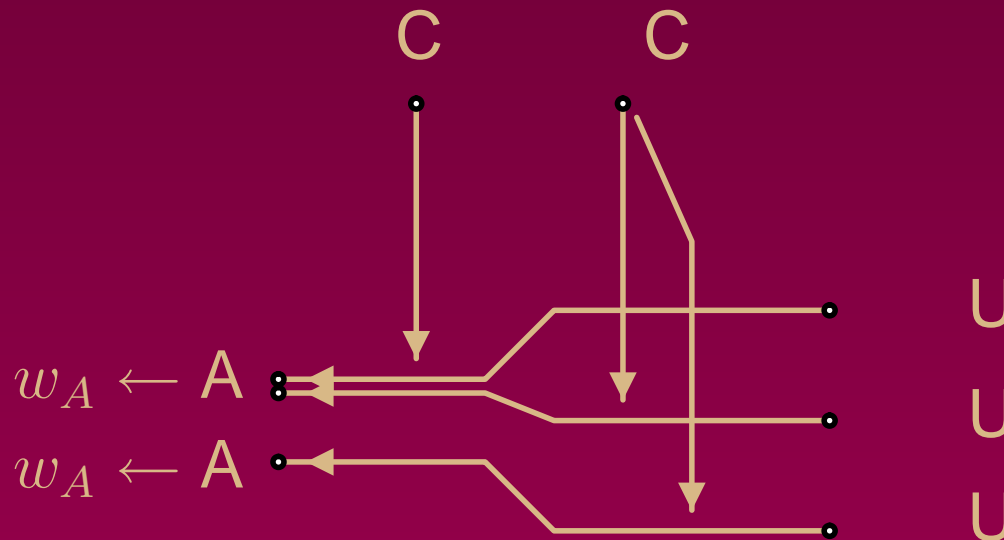
Mišljenje u širem smislu, prema Petzu, uključuje svaki kognitivni proces obrade ideja, predodžbi, slika, simbola i pojmova. U okvir mišljenja ulaze različiti procesi od asociranja, sjećanja i maštanja, preko stjecanja pojmova, do logičkog rezoniranja i stvaralačkog mišljenja. Mišljenje se razvilo kroz čovjekovo praktično djelovanje i doprinosi njegovoj uspješnijoj prilagodbi u svijetu.

Razmišljanje s ciljem (goal-directed thinking) može se opisati kao zaključivanje temeljeno na: *alternativama*, *uvjerenjima* i *ciljevima*. Ono nam pomaže pri:

- donošenju odluke u zadovoljavanju osobnih *ciljeva*,
- usvajanju uvjerenja koje su *akcije* efikasnije,
- prihvaćanju *ciljeva* usklađenim s našim višim ciljevima, uključujući i zadovoljstvo vlastitim životom.

Ciljno razmišljanje

- alternativa (A) je jedna mogućnost postizanja cilja (C)
- ciljeve koristimo za evaluaciju alternativa
- uvjerenje (U) se sastoji od činjenica i dokaza koja nam kazuju do koje mjere neka alternativa postiže cilj kojim evaluiramo alternativu. Rezultat korištenja tih uvjerenja je revizija ili potvrđivanje *težina* svake alternative.



Primjer 1. Ocjenjivanje

Svakom od 4 studenta dana je ocjena iz: M, F i E:

	M	F	E	
a	18	12	6	36
b	18	7	11	36
c	5	17	8	30
d	5	12	13	30

prag 10 bod.

Primjer 1. Ocjenjivanje

Svakom od 4 studenta dana je ocjena iz: M, F i E:

	M	F	E	
a	18	12	6	36
b	18	7	11	36
c	5	17	8	30
d	5	12	13	30

prag 10 bod.

- a i b su bolji od c i d ,

Primjer 1. Ocjenjivanje

Svakom od 4 studenta dana je ocjena iz: M, F i E:

	M	F	E	
a	18	12	6	36
b	18	7	11	36
c	5	17	8	30
d	5	12	13	30

prag 10 bod.

- a i b su bolji od c i d ,
- student c je lošiji od d ,

Primjer 1. Ocjenjivanje

Svakom od 4 studenta dana je ocjena iz: M, F i E:

	M	F	E	
a	18	12	6	36
b	18	7	11	36
c	5	17	8	30
d	5	12	13	30

prag 10 bod.

- a i b su bolji od c i d ,
- student c je lošiji od d ,
- b je lošiji od a jer ...

Primjer 1. Ocjenjivanje

Svakom od 4 studenta dana je ocjena iz: M, F i E:

	M	F	E	
a	18	12	6	36
b	18	7	11	36
c	5	17	8	30
d	5	12	13	30

prag 10 bod.

- a i b su bolji od c i d ,
- student c je lošiji od d ,
- b je lošiji od a jer ima manju sumu ocjena iznad praga.

Primjer 1. Ocjenjivanje

Svakom od 4 studenta dana je ocjena iz: M, F i E:

	M	F	E	
a	18	12	6	36
b	18	7	11	36
c	5	17	8	30
d	5	12	13	30

prag 10 bod.

$$\Rightarrow a \succ b \succ d \succ c$$

- a i b su bolji od c i d ,
- student c je lošiji od d ,
- b je lošiji od a jer ima manju sumu ocjena iznad praga.

Primjer 1. Ocjenjivanje

Svakom od 4 studenta dana je ocjena iz: M, F i E:

	M	F	E	
a	18	12	6	36
b	18	7	11	36
c	5	17	8	30
d	5	12	13	30

prag 10 bod.

$$\Rightarrow a \succ b \succ d \succ c$$

- a i b su bolji od c i d ,
- student c je lošiji od d ,
- b je lošiji od a jer ima manju sumu ocjena iznad praga.

Ne postoje težine w_M, w_F, w_E tako da linearna kombinacija stupaca matrice s tim težinama prezentira dobiveni uređaj.

Primjer 2. Izbor motocikla

Attribute	Kawasaki	Yamaha	Honda	BMW
Price, pounds (9)	6499	5199	6199	8220
Displacement, cc (5)	1052	1188	998	987
Range, miles (7)	175	160	170	200
Top speed, mph (7)	160	155	160	145
Engine (14)				
Responsiveness, (0.2)	(E, 0.8)	(G, 0.3) (E, 0.6)	(G, 1.0)	(I, 1.0)
Fuel consumption mpg (0.4)	(32, 0.25)	(28, 0.25)	(31, 0.25)	(35, 0.25)
	(36, 0.25)	(34, 0.25)	(35, 0.25)	(39, 0.25)
	(41, 0.25)	(38, 0.25)	(39, 0.25)	(46, 0.25)
	(43, 0.25)		(43, 0.25)	(48, 0.25)
Quietness (0.1)	(I, 0.5)	(A, 1.0)	(G, 0.5)	
	(A, 0.5)		(E, 0.3)	
Vibration (0.1)	(G, 1.0)	(I, 1.0)	(G, 0.5)	(P, 1.0)
			(E, 0.5)	
Starting (0.2)	(G, 1.0)	(A, 0.6)	(G, 1.0)	(A, 1.0)
		(G, 0.3)		

P–Poor, I–Indifferent, A–Average, G–Good, E–Excellent

Primjer 2. Izbor motocikla

Attribute	Kawasaki	Yamaha	Honda	BMW
Operation (7)				
Handling (0.5)				
Steering (0.3)	(E, 0.9)	(G, 1.0)	(A, 1.0)	(A, 0.6)
Bumpy bends (0.1)	(A, 0.5)	(G, 1.0)	(G, 0.8)	(P, 0.5)
	(G, 0.5)		(E, 0.1)	(I, 0.5)
Manoeuvrability (0.4)	(A, 1.0)	(E, 0.9)		(P, 1.0)
Top speed stability (0.3)	(E, 1.0)	(G, 1.0)	(G, 1.0)	(G, 0.6)
				(E, 0.4)
Transmission (0.167)				
Clutch operation (0.5)	(A, 0.8)	(G, 1.0)	(E, 0.85)	(I, 0.2)
				(A, 0.8)
Gearbox operation (0.5)	(A, 0.5)	(I, 0.5)	(E, 1.0)	(P, 1.0)
	(G, 0.5)	(A, 0.5)		
Brakes (0.333)				
Stopping power (0.4)	(G, 1.0)	(A, 0.3)	(G, 1.0)	
		(G, 0.6)		

P–Poor, I–Indifferent, A–Average, G–Good, E–Excellent

Primjer 2. Izbor motocikla

Attribute	Kawasaki	Yamaha	Honda	BMW
Braking stability (0.3)	(G, 0.5) (E, 0.5)	(G, 1.0)	(A, 0.5) (G, 0.5)	(E, 1.0)
Feel at control (0.3)	(P, 1.0)	(G, 0.5) (E, 0.5)	(G, 1.0)	(G, 0.5) (E, 0.5)
General (14)				
Quality of finish (0.4)	(P, 0.5) (I, 0.5)	(G, 1.0)	(E, 1.0)	(G, 0.5) (E, 0.5)
Seat comfort (0.3)	(G, 1.0)	(G, 0.5) (E, 0.5)	(G, 1.0)	(E, 1.0)
Headlight (0.1)	(G, 1.0)	(A, 1.0)	(E, 1.0)	(G, 0.5) (E, 0.5)
Mirrors (0.1)	(A, 0.5) (G, 0.5)	(G, 0.5) (E, 0.5)	(E, 1.0)	(G, 1.0)
Horn (0.1)		(G, 1.0)	(G, 0.5) (E, 0.5)	(E, 1.0)

P–Poor, I–Indifferent, A–Average, G–Good, E–Excellent

Online primjeri i ankete

Ovo su primjeri na <http://decision.math.hr/>

- Primjeri
- Plitvice - rangiranje zona
- Japan City Banks
- China's Commercial banks
- Kupnja kuće
- Samorangiranje

Uspoređivanje u parovima

- S –skup alternativa (objekti koje uspoređujemo prema nekom kriteriju, napr. slatkoća vina.).

Uspoređivanje u parovima

- S –skup alternativa (objekti koje uspoređujemo prema nekom kriteriju, napr. slatkoća vina.).
- $a \succsim b$ znači: *a je jednako tako dobro kao b ako ne i bolje.*

Uspoređivanje u parovima

- S –skup alternativa (objekti koje uspoređujemo prema nekom kriteriju, napr. slatkoća vina.).
- $a \succcurlyeq b$ znači: *a je jednako tako dobro kao b ako ne i bolje.*
- (S, \succcurlyeq) –relacija uređaja na S .

Uspoređivanje u parovima

- S –skup alternativa (objekti koje uspoređujemo prema nekom kriteriju, napr. slatkoća vina.).
- $a \succcurlyeq b$ znači: *a je jednako tako dobro kao b ako ne i bolje.*
- (S, \succcurlyeq) –relacija uređaja na S .

Teorem. Ako je \succcurlyeq potpuna, refleksivna i tranzitivna onda je funkcija $V(x) := \{y \in S \mid x \succcurlyeq y\}$ ordinalna funkcija vrijednosti na S tj.

$$x \succcurlyeq y \iff V(x) \supseteq V(y).$$

Uspoređivanje u parovima

- S –skup alternativa (objekti koje uspoređujemo prema nekom kriteriju, napr. slatkoća vina.).
- $a \succcurlyeq b$ znači: *a je jednako tako dobro kao b ako ne i bolje.*
- (S, \succcurlyeq) –relacija uređaja na S .

Teorem. Ako je \succcurlyeq potpuna, reflektivna i tranzitivna onda je funkcija $V(x) := \{y \in S \mid x \succcurlyeq y\}$ ordinalna funkcija vrijednosti na S tj.

$$x \succcurlyeq y \iff V(x) \supseteq V(y).$$

Drugim riječima: *kvalitetu objekata možemo izraziti brojem.*

Uspoređivanje u parovima

- S –skup alternativa (objekti koje uspoređujemo prema nekom kriteriju, napr. slatkoća vina.).
- $a \succcurlyeq b$ znači: *a je jednako tako dobro kao b ako ne i bolje.*
- (S, \succcurlyeq) –relacija uređaja na S .

Teorem. Ako je \succcurlyeq potpuna, reflektivna i tranzitivna onda je funkcija $V(x) := \{y \in S \mid x \succcurlyeq y\}$ ordinalna funkcija vrijednosti na S tj.

$$x \succcurlyeq y \iff V(x) \geq V(y).$$

Drugim riječima: *kvalitetu objekata možemo izraziti brojem.*

- V nije jedinstvena jer ako je $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ rastuća onda je $h \circ V$ opet ordinalna funkcija vrijednosti.

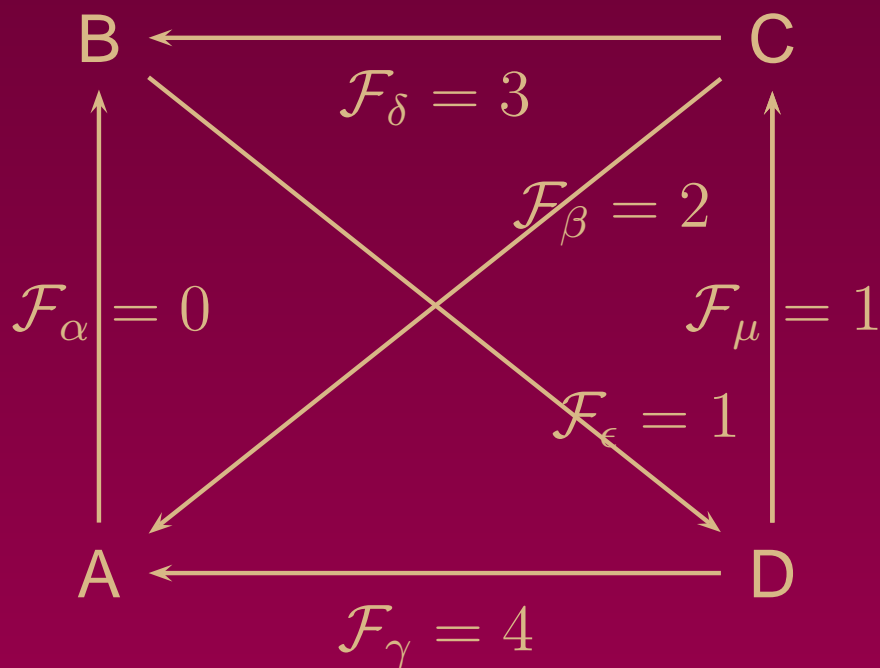
Organizacija inputa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 7 & 1/3 \\ 1/5 & 1/7 & 1 & 3 \\ 1/9 & 3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

Recipročna matrica (Saaty)

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrica toka (Metoda potencijala)



Graf preferencija $\mathcal{G} = (V, A)$

luk	F	A	B	C	D
α	0	-1	1	0	0
β	2	1	0	-1	0
γ	4	1	0	0	-1
δ	3	0	1	-1	0
ϵ	1	0	-1	0	1
μ	1	0	0	1	-1

Matrica incidencije od \mathcal{G}

$$B \succcurlyeq A \iff \mathcal{F}_\alpha \geq 0, \quad \alpha = (B, A)$$

Konzistentnost toka

Definicija. Tok \mathcal{F} je *konzistentan* ako je suma komponenta toka duž svakog ciklusa jednaka 0. **natrag**

Ekvivalentno, postoji $X : V \rightarrow \mathbb{R}$ (potencijal) tako da

$$AX = \mathcal{F}. \quad (1)$$

X nazivamo *jaki intergral* od \mathcal{F} . U tom slučaju X je izmjeriva funkcija u smislu von Neumanna i Morgensterna, tj.

$$a \succcurlyeq b \iff X(a) \geq X(b).$$

$$\mathcal{F}_\alpha = X(a) - X(b) \text{ za } \alpha = (a, b) \in \mathcal{A}$$

Formula (1) je posljedica ortogonalne dekompozicije

$$N(A^\tau) \oplus R(A) = \mathbb{R}^m$$

$R(A)$ – *prostor stupaca*, $N(A^\tau)$ – *prostor ciklusa*.

Konzistentnost toka

Komentar 1. Positivna recipročna matrica (a_{ij}) je *konzistentna* ako i samo ako

$$a_{ij}a_{jk} = a_{ik}, \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

Ako definiramo tok \mathcal{F} s

$$\mathcal{F}_{(i,j)} = \log a_{ij}$$

tada, uzimajući logaritam gornjeg identiteta,

$$\mathcal{F}_{(i,j)} + \mathcal{F}_{(j,k)} = \mathcal{F}_{(i,k)}$$

što je uvjet konzistentnosti toka \mathcal{F} .

Konzistentnost toka

Komentar 2. *Stohastička preferencija* p_{ab} je vjerojatnost izabiranja opcije a ako je ponuđen izbor između a and b . Ako stohastička preferencija zadovoljava uvjet konzistentnosti

$$\frac{p_{ab}}{p_{ba}} \cdot \frac{p_{bc}}{p_{cb}} = \frac{p_{ac}}{p_{ca}}$$

za sve $a, b, c \in V$, tada inducira slabu preferenciju na V i generira ordinalnu funkciju vrijednosti.

Ako definiramo tok

$$\mathcal{F}_{(b,c)} := \log \frac{p_{bc}}{p_{cb}}$$

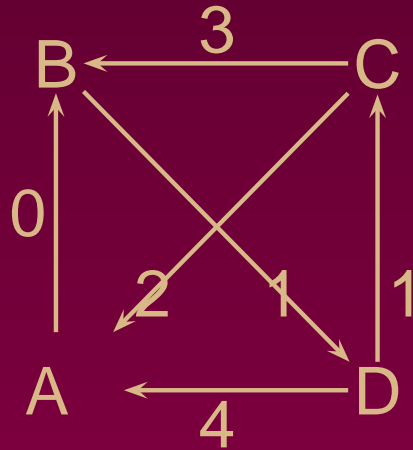
onda je stohastička preferencija konzistentna ako i samo ako je \mathcal{F} konzistentan.

Normalni integral

Definicija. *Normalni integral* X toka \mathcal{F} je rješenje normalne jednačbe $A^T AX = A^T \mathcal{F}$ od $AX = \mathcal{F}$.

Normalni integral

Definicija. Normalni integral X toka \mathcal{F} je rješenje normalne jednačbe $A^T AX = A^T \mathcal{F}$ od $AX = \mathcal{F}$.

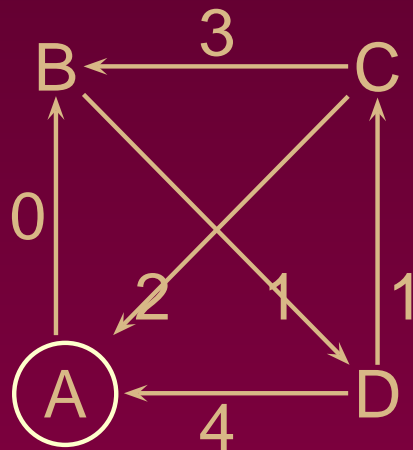


$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Normalna jednačba.

Normalni integral

Definicija. Normalni integral X toka \mathcal{F} je rješenje normalne jednačbe $A^T AX = A^T \mathcal{F}$ od $AX = \mathcal{F}$.

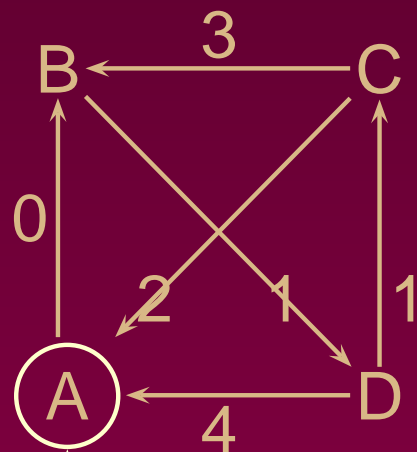


$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Normalna jednačba.

Normalni integral

Definicija. Normalni integral X toka \mathcal{F} je rješenje normalne jednačbe $A^T AX = A^T \mathcal{F}$ od $AX = \mathcal{F}$.



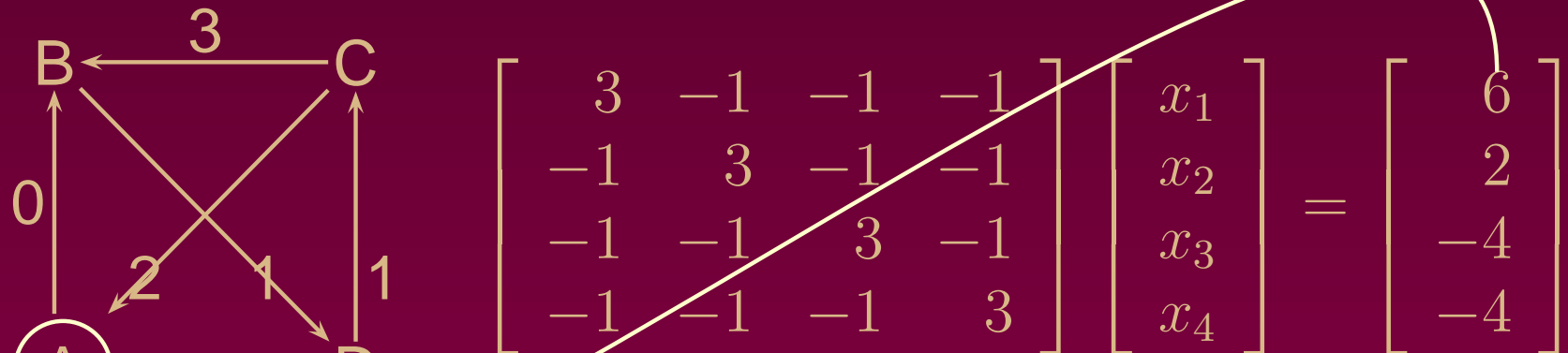
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Normalna jednačba.

Prva komponenta od $A^T \mathcal{F}$ predstavlja razliku ulaznog i izlaznog toka u čvor A .

Normalni integral

Definicija. Normalni integral X toka \mathcal{F} je rješenje normalne jednačbe $A^T AX = A^T \mathcal{F}$ od $AX = \mathcal{F}$.



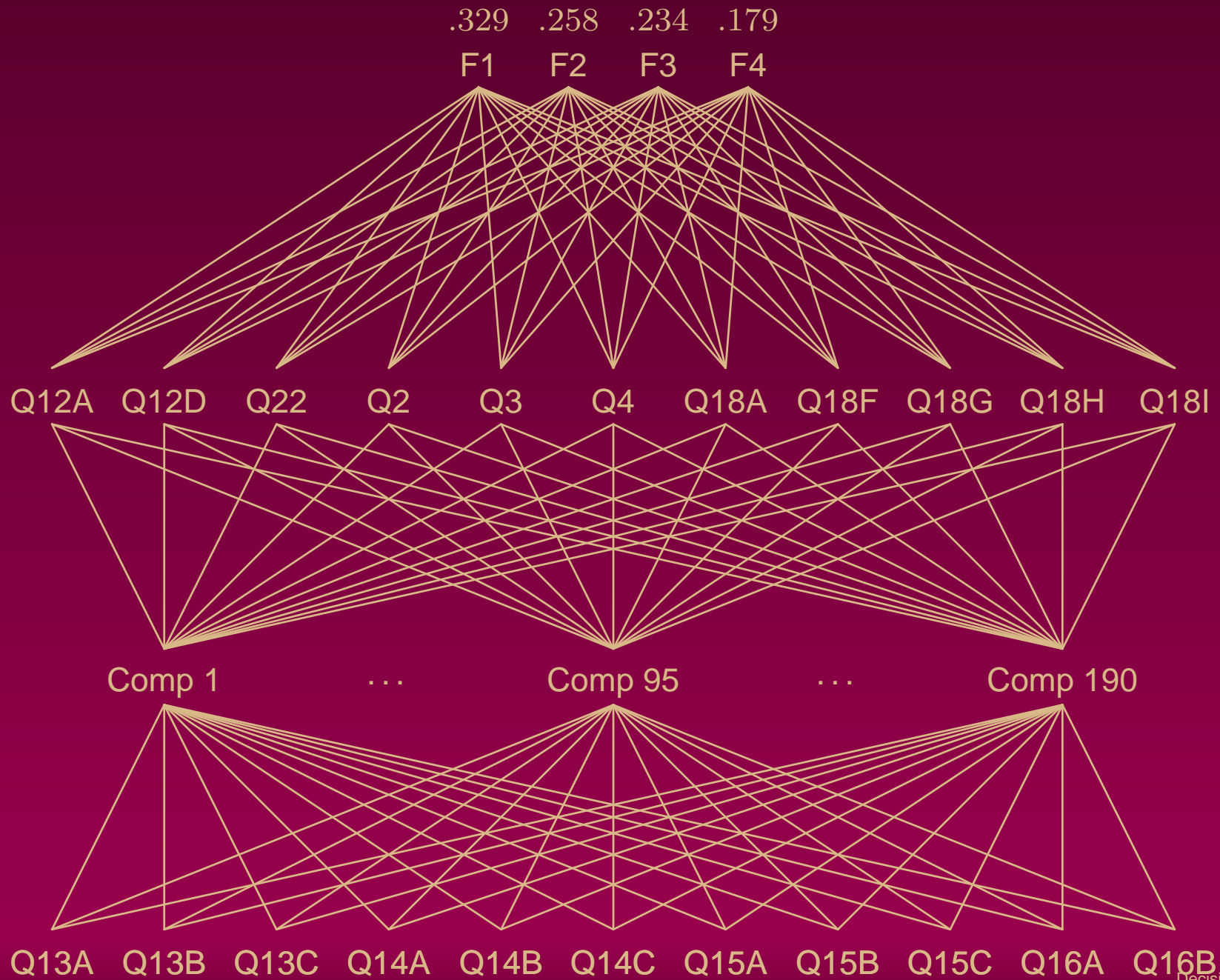
Normalna jednačba.

Prva komponenta od $A^T \mathcal{F}$ predstavlja razliku ulaznog i izlaznog toka u čvor A .

(Jedinstvenost) Uvjet normalizacije $\sum_i x_i = 0$ daje $x_1 = 6/4, x_2 = 2/4, x_3 = -4/4, x_4 = -4/4$.

Primjer →

Hijerarhija odluke



Agregacija tokova.

$C_i, i \in \{1, \dots, k\}$ – kriteriji, w_i – težine kriterija,
 (V, \mathcal{A}_i) – graf preferencije, \mathcal{F}_i – tok preferencije.

Konsenzus graf (V, \mathcal{A}) i *konsenzus tok* \mathcal{F} definiraju se ovako: Za par alternativa $\alpha = (u, v)$ računamo

$$F_\alpha := \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha \in \mathcal{A}_i \text{ or } -\alpha \in \mathcal{A}_i}}^k w_i \mathcal{F}_i(\alpha) \quad (2)$$

Ako je $F_\alpha \geq 0$ tada $\alpha \in \mathcal{A}$ i $\mathcal{F}(\alpha) := F_\alpha$. Inače, $-\alpha = (v, u) \in \mathcal{A}$ i $\mathcal{F}(-\alpha) := -F_\alpha$. Ako F_α nije definiran tada u i v nisu susjedi u konsenzus grafu.

[Primjer \rightarrow]

Agregacija tokova.

U hijerarhijskoj strukturi svaki čvor, osim onih u posljednjem nivou, je roditelj (kriterij) za svoju djecu. Djeca jednog roditelja nalaze se u istom nivou^a. Suma težina čvorova u nekom nivou jednaka je sumi težina njihovih roditelja..

Za nivo koji još nije rangiran, agregacija tokova se računa preko svih roditelja. Za svaku komponentu povezanosti \mathcal{C} izračuna se konsenzus graf $X_{\mathcal{C}}$, a nakon toga težine $w_{\mathcal{C}}$ po formuli

$$w_{\mathcal{C}} = k_{\mathcal{C}} \cdot \frac{a^{X_{\mathcal{C}}}}{\|a^{X_{\mathcal{C}}}\|_1} \quad (3)$$

$k_{\mathcal{C}}$ = suma težina svih roditelja od \mathcal{C} . Proces se ponavlja dok se ne rangira i najniži nivo.

^aRoditelji čvora mogu biti u različitim nivoima.

Agregacija tokova.

IME	GGRUPA	UNIMOD. KONSENZUS	STOH. TOK	CONDORCET
V. M.	0.243	0.168	0.319	0.235 ↓
L. K.	0.171	0.141	0.157	0.276 ↑
A. M.	0.149	0.138	0.140	0.093 ↓
G. J.	0.142	0.132	0.130	0.182 ↑
A. V. M.	0.092	0.114	0.081	0.091
N. F.	0.072	0.104	0.065	0.025
D. C.	0.069	0.102	0.056	0.025 ↓
P. B.	0.062	0.100	0.052	0.046 ↑
Inc.	10.17	12.17	12.41	

Uspoređivanje raznih konsenzusa.

Tabela odlučivanja

		stanja (kriteriji)			
		θ_1	θ_2	\dots	θ_n
Akcije	a_1	v_{11}	v_{12}	\dots	v_{1n}
	\cdot	\cdot	\cdot	\dots	\cdot
	a_i	v_{i1}	v_{i2}	\dots	v_{in}
	\cdot	\cdot	\cdot	\dots	\cdot
	a_m	v_{m1}	v_{m2}	\dots	v_{mn}

$$U_i := \sum_j P(\theta_j) v_{ij}$$

Tabela odlučivanja.

Konsenzus, za kriterije $\theta_1, \dots, \theta_n$ se računa po formuli (2).

$$\mathcal{F}_{kj} = \sum_i P(\theta_i) (v_{ki} - v_{ji}), \quad k, j = 1, \dots, m \text{ and } k \neq j. \quad (4)$$

\mathcal{F}_{kj} je komponenta toka na luku (a_k, a_j) .

Teorem. $X_k = U_k - \frac{1}{m} \sum_j U_j$.

Agregacija ocjena

The main cause of non-additivity of criteria in MCDM is their interaction. It seems reasonable to introduce a *coalition* of two or more criteria as a new criterion.

Introducing threshold complicates decision process, on the scale 0–20 the threshold is usually 10. The following example is taken from Bouyssou, 1996.

Consider four students and their grades in three courses: physics, mathematics and economics. For each course, a final grade between 0 and 20 is allocated:

Student	P	M	E	mean	intuitive
a	18	12	6	12	1 st
b	18	7	11	12	2 nd
c	5	17	8	10	4 th
d	5	12	13	10	3 rd

Group profile

Agregacija ocjena

For the *strength* of coalition we take the sum of points for each criterion in coalition. We say that coalition is *weak* if the sum of points is less than 20.

	P	M	E	PM	ME	PE	ranks
w	5	5	5	3	3	3	
a	18	12	6	30	18	24	0.397
b	18	7	11	25	18	29	0.366
c	5	17	8	22	25	13	0.108
d	5	12	13	17	25	18	0.129

Coalitions of criteria.

Weak coalitions, in colored cells, are not taken into consideration (missing data).

Inverzija rangova

1. Jednostavna inverzija

Slaba preferencija generirana unimodularnim tokom i izračunati potencijalnisu u skladu.

2. Dodavanje nove alternarive

Dodavanje/oduzimanje alternative (kopije) može promijeniti odnos preostalih alternativa.

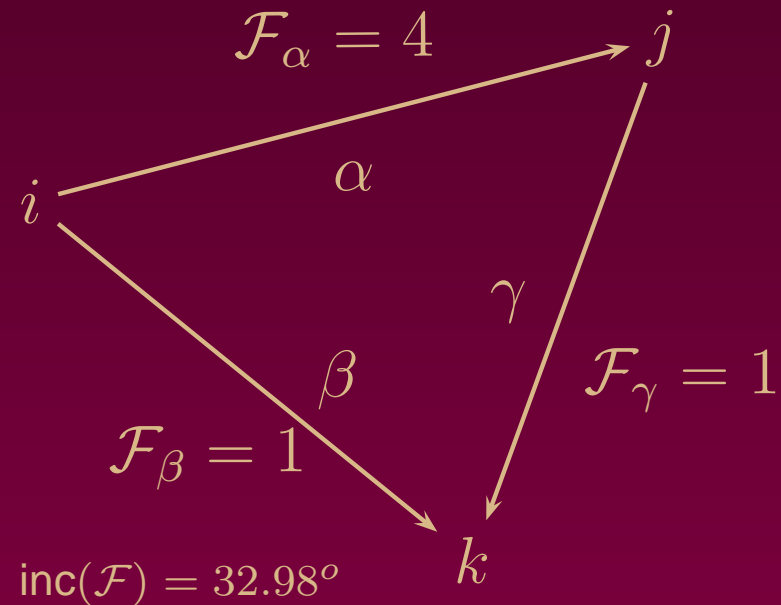
3. A Condition of Order Preservation

U nedavno objavljenom članku (Bana e Costa and Vansnick) Saatyjevoj metodi je zamjereno zbog nepoštivanja 'Condition of Order Preservation' (COP).

Inverzija rangova

1. Jednostavna inverzija

node	V	X
i	1	-1.67
j	2	1
k	3	0.67



$V(x) := \#\{y \mid x \succcurlyeq y\}$ je ordinalan funkcija vrijednosti generirana unimodularnim tokom. Očito je da V i X ne daju isti uređaj.

[Primjer \rightarrow]

Inverzija rangova

2. Dodavanje nove alternativne

Alternativa l je kopija i . [Kopija \rightarrow] [Irel. alt. \rightarrow]

	Flow matrix				Old	Novi
	i	j	k	$l = i$	X	X
i	0	3.5	2	0	1.83	1.38
j	-3.5	0	1	-3.5	-0.83	-1.5
k	-2	-1	0	-2	-1	-1.25
$l = i$	0	3.5	2	0		1.38

Dodavanje kopije.

Kad bi umjesto $\mathcal{F}_{ik} = 2$ stavili vrijednost 4.5 tok \mathcal{F} postaje konzistentan i ne dolazi do inverzije rangova.

Inverzija rangova

3. A Condition of Order Preservation

$$a_{ij} > a_{kl} \implies \frac{w_i}{w_j} > \frac{w_k}{w_l} \quad (\text{EM})$$

$$\mathcal{F}_{(i,j)} > \mathcal{F}_{(k,l)} \implies X_i - X_j > X_k - X_l. \quad (\text{PM})$$

	x1	x2	x3	x4	x5	w
x1	1	2	3	5	9	0.426
x2		1	2	4	9	0.281
x3			1	2	8	0.165
x4				1	7	0.101
x5					1	0.027

Metoda sv. vektora

	x1	x2	x3	x4	x5	X
x1	0	0.5	1	2	4	1.5
x2		0	0.5	1.5	4	1.1
x3			0	0.5	3.5	0.5
x4				0	3	-0.2
x5					0	-2.9

Matrica toka (isti primjer)

$$\frac{w_1}{w_4} = 4.22 \text{ (} > \text{)} \frac{w_4}{w_5} = 3.74 \ \& \ a_{14} = 5 \text{ (} < \text{)} a_{45} = 7 \quad (\text{EM})$$

$$X_1 - X_4 = 1.7 \text{ (} < \text{)} X_4 - X_5 = 2.7 \ \& \ \mathcal{F}_{14} = 2 \text{ (} < \text{)} \mathcal{F}_{45} = 3.$$

Otvoreni problemi

- Algoritam za konzistentnu aproksimaciju.
Rješavanje $A^T AX = A^T \mathcal{F}$ za velike i rijetke grafove je vremenski zahtjevno. Umjesto LU dekompozicije matrice treba naći transformaciju na tokovima.
- Projekcija na konus.
Pitanje je kako izbjeći jednostavno invertiranje rangova za jako inkonzistentne tokove. Problem vodi na projekciju na konus.
- Trijade umjesto parova.
Istražujemo mogućnost uvođenja trijada umjesto uspoređivanja u parovima.

Otvoreni problemi

- Algoritam za konzistentnu aproksimaciju.

Matrica $A^T A$ za velike i rijetke grafove ima puno nula i numeričko rješavanje sistema jednažbi dugo traje. Ako je povrh svega još i grupno odlučivanje u igri i svaki član grupe ima svoju hijerarhiju problem odlučivanja postaje i numerički kompleksan.

Ideja je napraviti konačan niz transformacija toka F tako da postane konzistentan. Te transformacije bi trebale izgledati:

```
UNLESS (  $\mathcal{F}$  CONSISTENT )  
{  
 $\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F} + \gamma c$  (gdje je  $c$  ciklus i  $\gamma \in \mathbb{R}$ )  
}
```

- Projekcija na konus.
- Trijade umjesto parova.

Otvoreni problemi

- Algoritam za konzistentnu aproksimaciju.
- Projekcija na konus.

Kažemo da su \mathcal{F} i \mathcal{F}' *ordinalno ekvivalentni*, oznaka $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}'$, ako su pripadni unimodularni tokovi jednaki.

Kažemo da je \mathcal{F} *ordinalno integrabilan* ako postoji potencijal X takav da je $AX \sim \mathcal{F}$. X nazivamo *ordinalnim integralom* od \mathcal{F} .

Ekvivalentno, \mathcal{F} je ordinalno integrabilan ako ima ordinalno ekvivalentan konzistentan tok.

Ordinalni konus pridružen \mathcal{F} definira se kao

$$C_{\mathcal{F}} := \left\{ X \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n X_k = 0, AX \geq 0 \text{ and } (\mathcal{F}_\alpha = 0 \Rightarrow (AX)_\alpha = 0) \right\}.$$

$C_{\mathcal{F}}$ je konus svih potencijala čija je potencijalna razlika ordinalno ekvivalentna \mathcal{F} . $C_{\mathcal{F}}$ je zatvoreni poliedarski konus. Očito,

Theorem 1. (V. Šego) \mathcal{F} je ordinalno integrabilan ako i samo ako $A(C_{\mathcal{F}}) \neq \{0\}$. [Primjer \rightarrow]

- Trijade umjesto parova.

Otvoreni problemi

- Algoritam za konzistentnu aproksimaciju.
- Projekcija na konus.
- **Trijade umjesto parova.**

Uspoređivanje u parovima je nezaobilazna tehnika sakupljanja ulaznih podataka u odlučivanju. Neki psiholozi tvrde da uvođenje treće opcije u razmatranje blokira um donosioca odluke. Želimo testirati mogućnost uvođenja trijada umjesto parova. Jedina referenca koja nam je poznata ja:

Castore, Carl H. and Hart, Edward W. and Sung, Yong H.,
Computer and Experimental Simulation of Triad Decision Making,
Technical rept., Purdue Univ. Lafayette Ind. 1973.

Preliminarni testovi ohrabruju i napravljeno je novo sučelje (V. Šego) na adresi: <http://decision.math.hr/programs/triplets/>.