MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

8. travnja 2005.

I. razred

1. Odredite sve trojke realnih brojeva x, y, z za koje vrijedi

$$4xyz - x^4 - y^4 - z^4 = 1.$$

2. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ paralelograma $ABCD$ odabrane su redom točke E i F takve da je $EF \parallel BD$. Dokažite da trokuti BCE i CDF imaju jednake površine.

3. Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1,$$

dokažite nejednakost

$$(a-1)(b-1)(c-1) \geq 8.$$

4. Dokažite da je

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \ldots + \sqrt{1 + \frac{1}{2004^2} + \frac{1}{2005^2}} = 2005 - \frac{1}{2005}.$$

Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

8. travnja 2005.

II. razred

1. Trokutu ABC upisana je kružnica polumjera r sa središtem u točki S. Pravac kroz točku S siječe stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ redom u točkama D i E. Dokažite da za površinu P trokuta CED vrijedi $P \geq 2r^2$. Kada vrijedi jednakost?

2. Nađite sve parove cijelih brojeva a i b za koje vrijedi

$$7a + 14b = 5a^2 + 5ab + 5b^2.$$

3. Neka je P polinom s cjelobrojnim koeficijentima takav da je $P(5) = 2005$. Može li broj $P(2005)$ biti potpun kvadrat (kvadrat prirodnog broja)?

4. Dano je 99 (ne nužno različitih) prirodnih brojeva manjih od 100. Ako zbroj nikoja dva, tri ili više od tih brojeva nije djeljiv sa 100, dokažite da su svi oni međusobno jednaki.

Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

8. travnja 2005.

III. razred

1. Odredite sve prirodne brojeve n za koje je broj

$$2^4 + 2^7 + 2^n$$

potpun kvadrat.

2. U trokutu s kutovima α, β i γ vrijedi jednakost

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin\gamma.$$

Ako je poznato da su kutovi α i β šiljasti, dokažite da je kut γ pravi.

3. Neka je T točka unutar trostrane piramide $ABCD$ i neka su točke A_1, B_1, C_1, D_1 presjecišta pravaca AT, BT, CT, DT s nasuprotnim stranama piramide, redom. Ako je

$$\frac{|AT|}{|TA_1|} = \frac{|BT|}{|TB_1|} = \frac{|CT|}{|TC_1|} = \frac{|DT|}{|TD_1|} = \lambda,$$

koje sve vrijednosti može λ poprimiti? Obrazložite odgovor!

4. Trokut ABC je šiljastokutan. Za bilo koju točku T iz unutrašnjosti ili s ruba trokuta ABC, točke T_a, T_b, T_c su redom nožišta okomica iz T na stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Ako je

$$f(T) = \frac{|AT_c| + |BT_a| + |CT_b|}{|TT_a| + |TT_b| + |TT_c|},$$

dokažite da $f(T)$ ne ovisi o izboru točke T ako i samo ako je trokut ABC jednakostraničan.

Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

8. travnja 2005.

IV. razred

1. Pokažite da za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ vrijedi

$$\sum_{k=2}^{n} \Big(\log_{\frac{3}{2}}(k^3+1) - \log_{\frac{3}{2}}(k^3-1) \Big) < 1 \, .$$

2. Neka je S točka na stranici $\overline{AB}$ danog šiljastokutnog trokuta ABC i neka su P i Q središta kružnica opisanih trokutima ASC i BSC. Odredite položaj točke S (na stranici $\overline{AB}$) tako da trokut PQS ima najmanju moguću površinu.

3. Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadan je rekurzivno:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_n &= \frac{4n-2}{n}\, a_{n-1}, \quad n \geq 2\,. \end{aligned}$$

Dokažite da su svi članovi tog niza prirodni brojevi.

4. Prirodni brojevi a, b i c zadovoljavaju jednakost

$$c(ac+1)^2 = (5c+2b)(2c+b).$$

a) Ako je c neparan, dokažite da je on potpun kvadrat.
b) Može li c biti paran?

Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.